GEOMETRIA W PRZESTRZENI (STEREOMETRIA)

Treść:

 - zagadnienie elementarne

 - zagadnienie wykraczające poza program

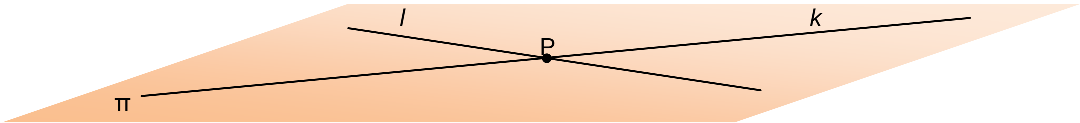
GEOMETRIA W PRZESTRZENI (STEREOMETRIA)

1. PROSTE, PŁASZCZYZNY I KĄTY W PRZESTRZENI

Wzajemne położenie prostych w przestrzeni:

Na płaszczyźnie wyróżnia się dwa główne położenia prostych: proste równoległe (w tym proste pokrywające się) i proste przecinające się (w tym proste prostopadłe). W przestrzeni można określić jeszcze jedno położenie: proste skośnie.

Proste przecinające się. Proste nazywamy przecinającymi się, jeżeli mają jeden punkt wspólny. Punkt ten nazywamy punktem przecięcia się prostych. Proste przecinające się leżą na jednej płaszczyźnie.

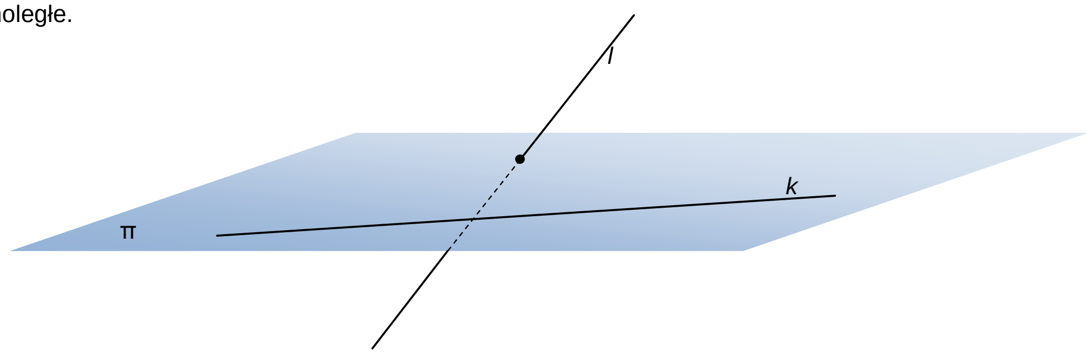


Proste *k* i *l* leżą na płaszczyźnie π i przecinają się w punkcie P. Jeżeli proste *k* i *l* tworzą kąt prosty, to mówimy, że są to proste prostopadłe.

Proste równoległe. Proste nazywamy równoległymi, jeżeli leżą na jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych.

Proste *k* i *l* leżą na płaszczyźnie π i nie przecinają się ze sobą, są więc równoległe (szczególną sytuacją równoległości jest położenie, gdy obie proste pokrywają się ze sobą, czyli prosta *k* jest tą samą prostą co prosta *l*).

Proste skośne. Proste nazywamy skośnymi , jeżeli nie leżą na jednej płaszczyźnie. Proste skośne nie przecinają się, ani nie są równoległe.

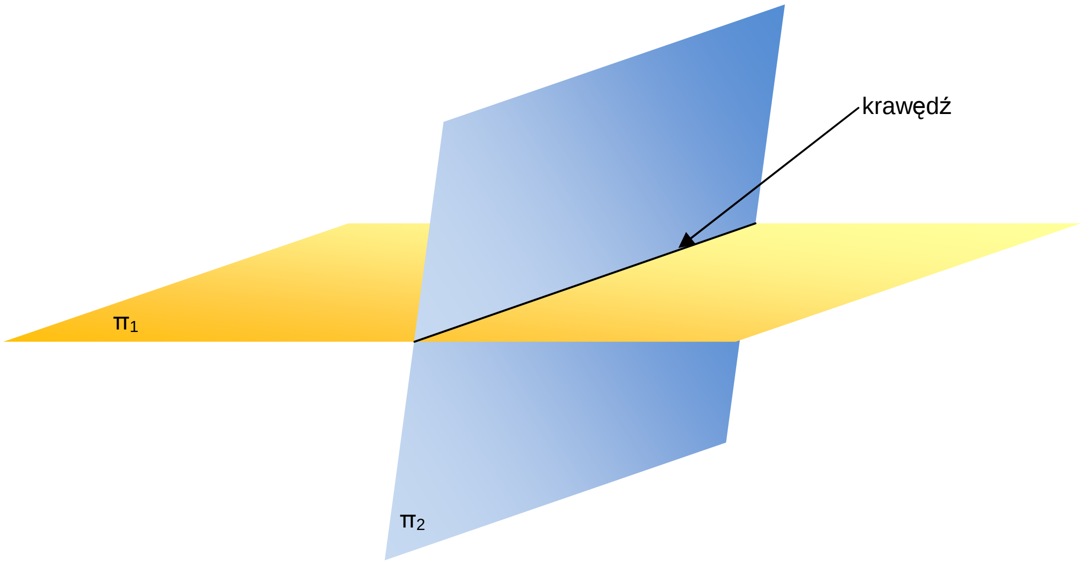


Prosta *k* leży na płaszczyźnie π, a prosta *l* nie leży na tej płaszczyźnie. Proste nie mają wspólnych punktów, nie są też równoległe.

Położenie płaszczyzn w przestrzeni.

Płaszczyzny równoległe: Dwie płaszczyzny są równoległe, jeżeli nie mają punktów wspólnych.

Płaszczyzny przecinające się: Dwie płaszczyzny nazywamy przecinającymi się, jeśli mają wspólną prostą (zwaną krawędzią).

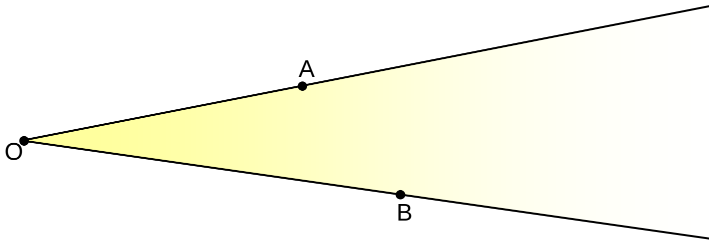


Proste przecinające się mogą być prostopadłe.

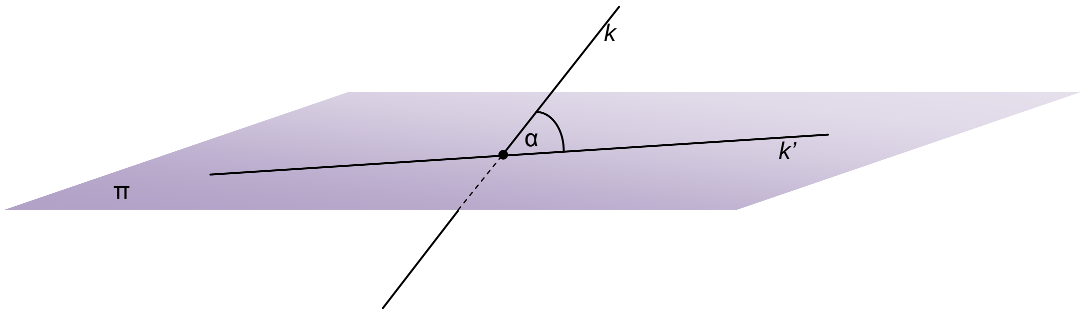
Kąty w przestrzeni.

W przestrzeni, oprócz kątów płaskich, wyróżniamy kilka innych rodzajów kątów.

Kąt płaski to część płaszczyzny ograniczona przez dwie półproste o wspólnym początku. Półproste tworzące kąt należą do kąta i nazywają się ramionami. Wspólny początek półprostych to wierzchołek kąta.

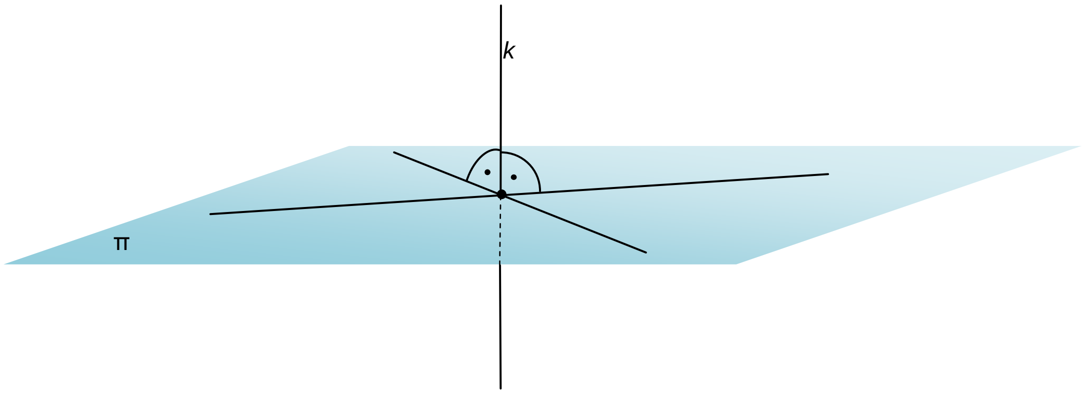


Kąt pomiędzy prostą a płaszczyzną: Kątem nachylenia pomiędzy prostą a płaszczyzną nazywamy miarę kąta płaskiego ostrego, który tworzy prosta z jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę („cieniem” prostej na płaszczyźnie).

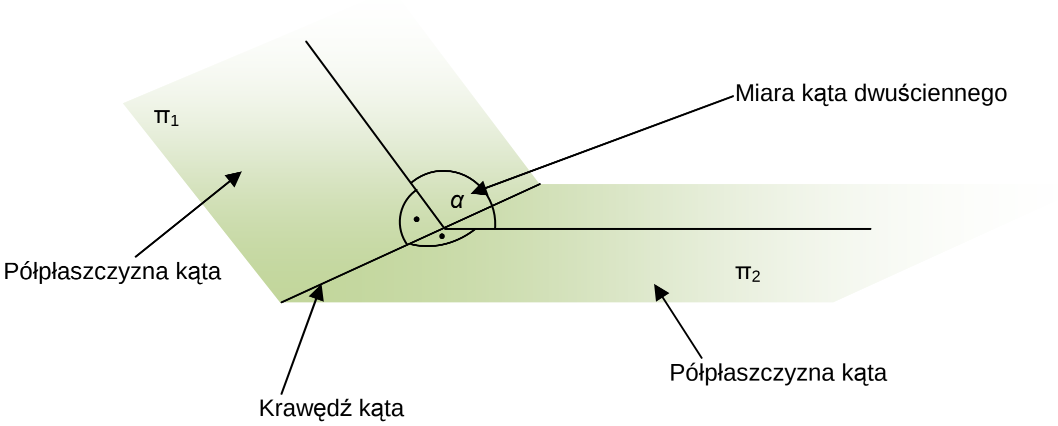


Prosta *k'* to rzut prostokątny prostej *k* na płaszczyznę π. Kąt nachylenia miedzy prostą *k* a płaszczyzną π, jest równy kątowi między prostą *k* i swoim rzutem *k'*.

Prosta prostopadła do płaszczyzny: Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeśli jest prostopadła do każdej prostej płaszczyzny, z którą ma punkt przecięcia.



Kąt dwuścienny: Kątem dwuściennym nazywamy część przestrzeni ograniczoną przez dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi.



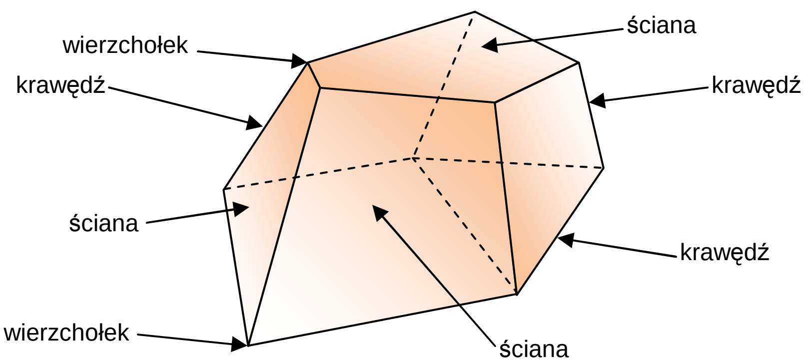
Miarą kąta dwuściennego jest miara kąta, jaki tworzą dwie półproste (każda leżąca na innej półpłaszczyźnie kąta) prostopadłe do krawędzi o wierzchołu na krawędzi kąta.

---

2. WIELOŚCIANY – WIDOMOŚCI OGÓLNE

Wielościan to bryła geometryczna, która jest częścią przestrzeni ograniczoną przez powierzchnię zamkniętą, utworzoną z wielokątów o wspólnych bokach.

UWAGA! Powyższe zdanie nie jest definicją lecz jedynie opisem wystarczającym dla potrzeb szkolnych.



Rodzaje wielościanów.

Wśród wielościanów wyróżniamy kilka rodzajów figur:

Graniastosłup: Wielościan, którego wszystkie wierzchołki znajdują się na dwóch równoległych płaszczyznach, i którego wszystkie krawędzie boczne są równoległe.

Rodzaje graniastosłupów (przykłady i określenia definicyjne):

a) graniastosłup prosty – graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a wszystkie ściany boczne są prostokątami,
b) graniastosłup prawidłowy – graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, np. kwadrat, trójkąt równoboczny, sześciokąt foremny, itd.,
c) graniastosłup pochyły – graniastosłup, którego krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw i ściany boczne są równoległobokami,
d) sześcian – wielokąt foremny – graniastosłup, którego wszystkie ściany są identycznymi (przystającymi) kwadratami,
e) prostopadłościan – graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami.

Ostrosłup: Wielościan, którego jedna ściana (zwana podstawą) jest dowolnym wielokątem, a wszystkie pozostałe ściany (zwane ścianami bocznymi) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

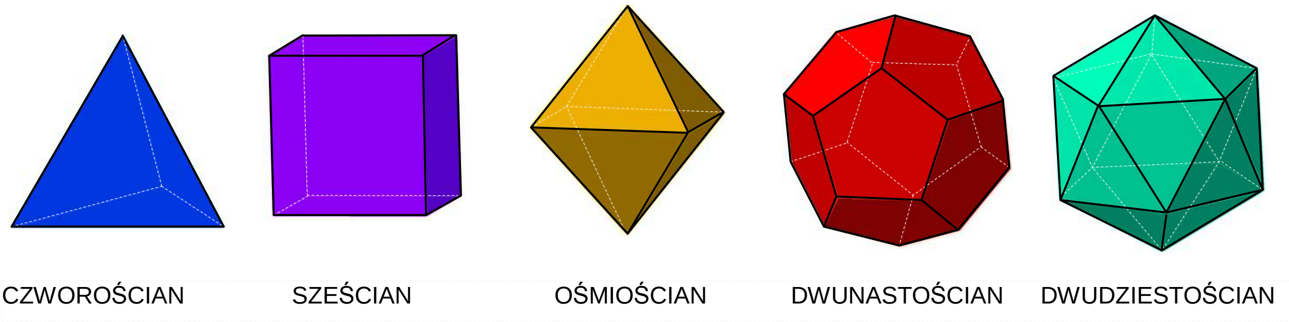
Rodzaje ostrosłupów (przykłady):

a) ostrosłup prosty – ostrosłup, którego wierzchołek znajduje się ponad środkiem podstawy (wyznaczonym przez środek okręgu wpisanego w podstawę lub – gdy nie ma takiego okręgu – środek symetrii figury),
b) ostrosłup prawidłowy – ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, np. kwadrat, trójkąt równoboczny, sześciokąt foremny, itd.,
c) ostrosłup pochyły – ostrosłup, który nie jest ostrosłupem prostym,
d) czworościan foremny – ostrosłup foremny, którego wszystkie cztery ściany są identycznymi (przystającymi) trójkątami równobocznymi.

Wielościan foremny: Wielościan, którego wszystkie ściany są identycznymi (przystającymi) wielokątami foremnymi i wszystkie kąty dwuścienne między ścianami są równe.

Rodzaje wielościanów foremnych (istnieje tylko pięć takich wielokątów):

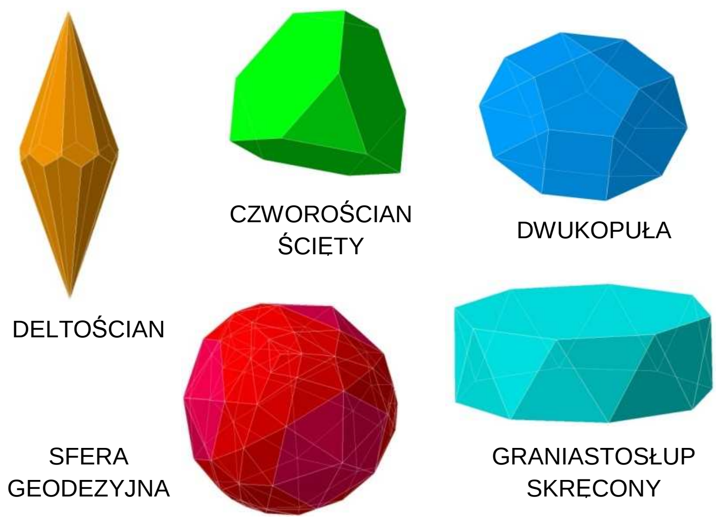
a) czworościan foremny – ma cztery ściany, które są przystającymi trójkątami równobocznymi,
b) sześcian – ma sześć ścian, które są przystającymi kwadratami,
c) ośmiościan foremny – ma osiem ścian, które są przystającymi trójkątami równobocznymi,
d) dwunastościan foremny – ma dwanaście ścian, które są przystającymi pięciokątami foremnymi,
e) dwudziestościan foremny – ma dwadzieścia ścian, które są przystającymi trójkątami równobocznymi.



Inne rodzaje wielościanów:

Inne rodzaje wielościanów (przykłady):

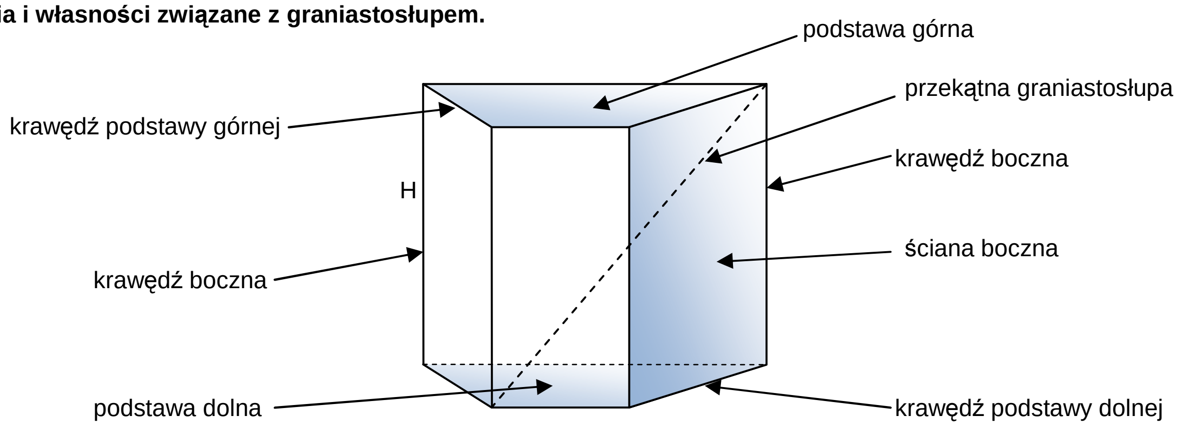
a) ostrosłup ścięty
b) graniastosłup skręcony,
c) graniastosłup ścięty,
d) kopuły,
e) piramidy, piramidy wydłużone,
f) dwupiramidy,
g) rotundy, rotundy wydłużone,
h) dwurotundy,
i) deltościany,
j) sfery i półsfery geodezyjne.



3. GRANIASTOSŁUPY.

<u>Graniastosłup:</u> Wielościan, którego wszystkie wierzchołki znajdują się na dwóch równoległych płaszczyznach, i którego wszystkie krawędzie boczne są równoległe.

Pojęcia i własności związane z graniastosłupem.



<u>Wysokość graniastosłupa:</u> Odległość pomiędzy podstawą dolną, a podstawą górną graniastosłupa. W przypadku graniastosłupów prostych wysokość jest równa długości krawędzi bocznej.

<u>Objętość graniastosłupa:</u> Objętość każdego graniastosłupa obliczamy ze wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

<u>Pole powierzchni bocznej graniastosłupa:</u> Suma pól wszystkich ścian bocznych graniastosłupa. Pole powierzchni bocznej oznaczamy zwykle jako P_b.

<u>Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa:</u> Suma pól wszystkich ścian graniastosłupa, czyli suma pól dwóch podstaw i wszystkich ścian bocznych.

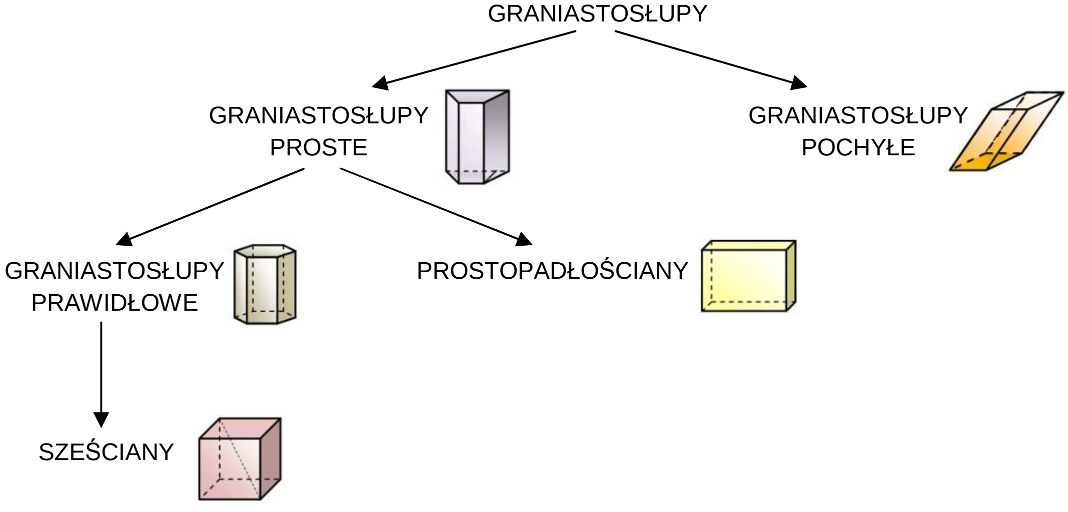
$$P_c = 2P_p + P_b$$

<u>Przekątna graniastosłupa:</u> Odcinek łączący dwa wierzchołki graniastosłupa, które nie należą do jednej ściany.

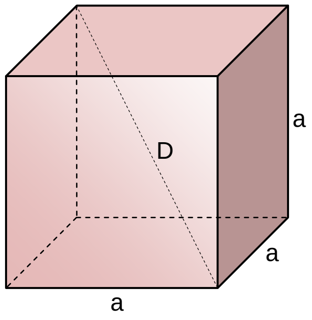
<u>Własności graniastosłupa:</u> Jeśli graniastosłup ma podstawę, którą jest n – kąt (wielokąt o n bokach), to:

- ilość ścian graniastosłupa wynosi n + 2,
- ilość krawędzi graniastosłupa wynosi 3n,
- ilość wierzchołków graniastosłupa wynosi 2n.

Klasyfikacja graniastosłupów:



SZEŚCIAN



Definicja sześcianu – wielokąt foremny – graniastosłup, którego wszystkie ściany są identycznymi (przystającymi) kwadratami.

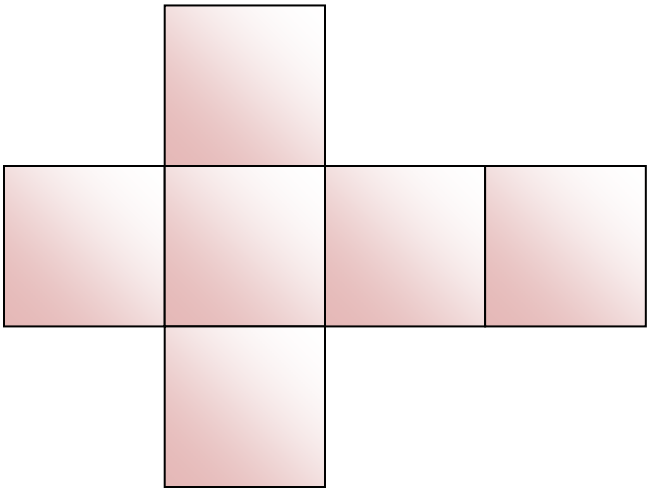
Własności: wszystkie ściany są przystającymi kwadratami, wszystkie kąty między ścianami wynoszą 90°. Sześcian ma cztery przekątne równej długości.

Objętość sześcianu: $V = a^3$

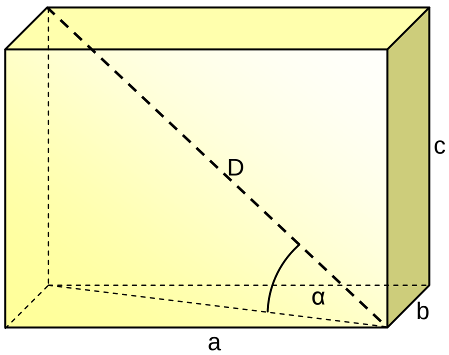
Pole powierzchni całkowitej sześcianu: $P_c = 6a^2$

Przekątna sześcianu: $D = a\sqrt{3}$

Siatka sześcianu:



PROSTOPADŁOŚCIAN



Definicja prostopadłościanu – graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami.

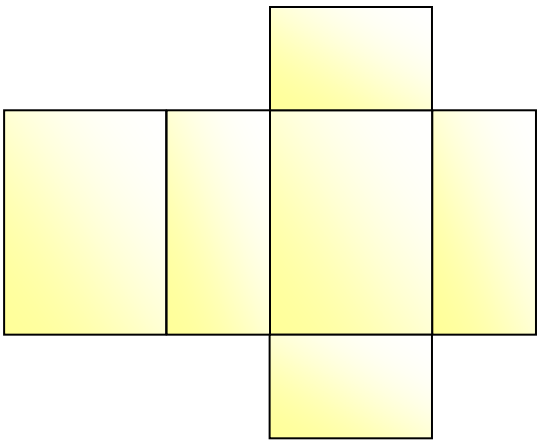
Własności: prostopadłościan ma trzy pary ścian identycznych (przystających) i równoległych. Wszystkie kąty między ścianami wynoszą 90°. Prostopadłościan ma cztery przekątne równej długości.

Objętość prostopadłościanu: $V = abc$

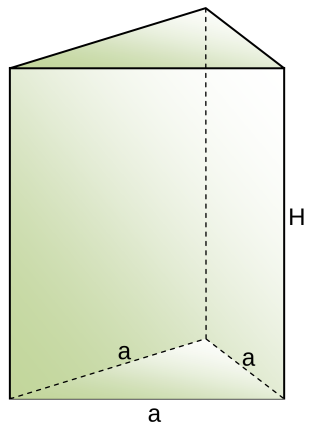
Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2ab + 2ac + 2bc$

Przekątna sześcianu: długość obliczamy korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Siatka prostopadłościanu:



GRANIASTOSŁUP PRAWIDŁOWY TRÓJKĄTNY:



Definicja graniastosłupa prawidłowego trójkątnego – graniastosłup prawidłowy, którego podstawą jest trójkąt równoboczny.

Własności: graniastosłup prawidłowy trójkątny ma trzy identyczne (przystające) ściany boczne. Graniastosłup prawidłowy trójkątny nie ma przekątnych.

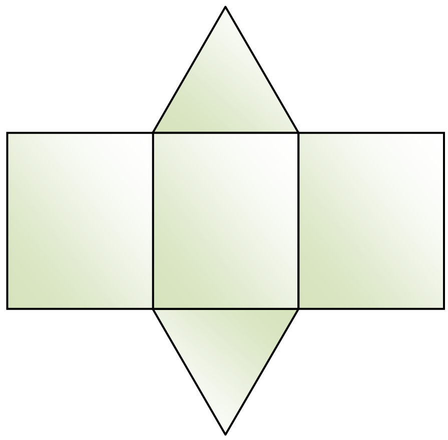
Objętość graniastosłupa: $$V = P_p \cdot H$$

Pole podstawy: obliczamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego:

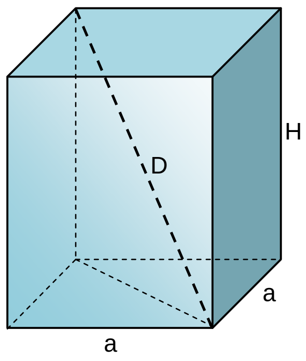
$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole powierzchni całkowitej: $$P_c = 2P_p + 3P_{\square}$$

Siatka graniastosłupa prawidłowego trójkątnego:



GRANIASTOSŁUP PRAWIDŁOWY CZWOROKĄTNY:



Definicja graniastosłupa prawidłowego czworokątnego – graniastosłup prawidłowy, którego podstawą jest kwadrat.

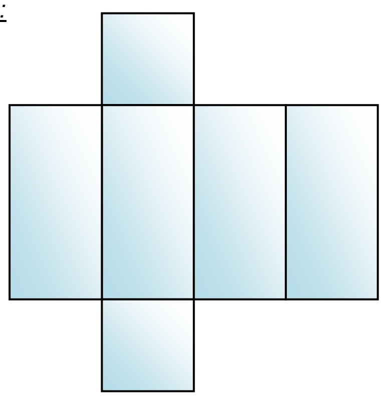
Własności: graniastosłup prawidłowy czworokątny ma cztery identyczne (przystające) ściany boczne. Graniastosłup prawidłowy czworokątny ma cztery równe przekątne.

Objętość graniastosłupa: $$V = P_p \cdot H$$

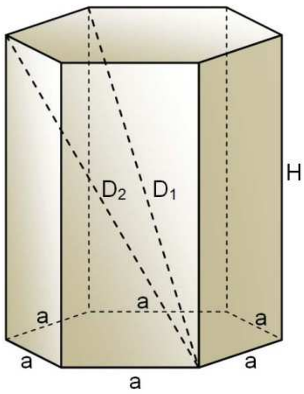
Pole podstawy: obliczamy ze wzoru na pole kwadratu: $$P_p = a^2$$

Pole powierzchni całkowitej: $$P_c = 2P_p + 4P_{\square}$$

Siatka graniastosłupa prawidłowego czworokątnego:



GRANIASTOSŁUP PRAWIDŁOWY SZEŚCIOKĄTNY:



Definicja graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego – graniastosłup prawidłowy, którego podstawą jest sześciokąt foremny.

Własności: graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma sześć identycznych (przystających) ścian bocznych. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma dwa rodzaje przekątnych: sześć dłuższych (D_1) i dwanaście krótszych (D_2).

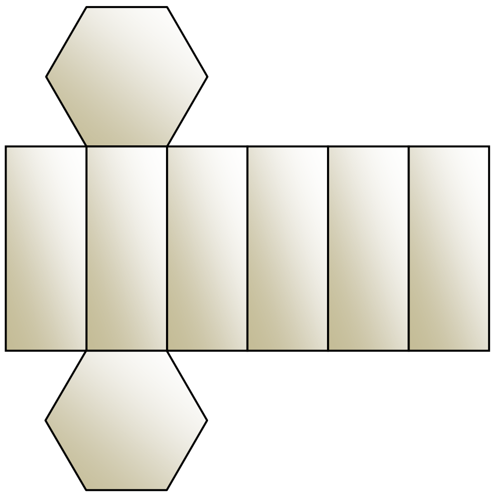
Objętość graniastosłupa: $$V = P_p \cdot H$$

Pole podstawy: obliczamy ze wzoru na pole sześciokąta foremnego:

$$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

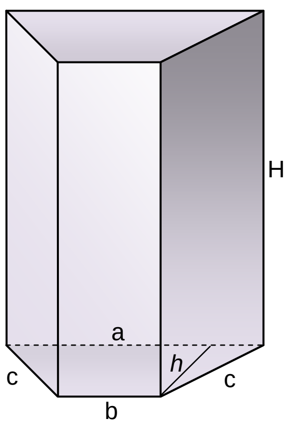
Pole powierzchni całkowitej: $$P_c = 2P_p + 6P_{\square}$$

Siatka graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego:

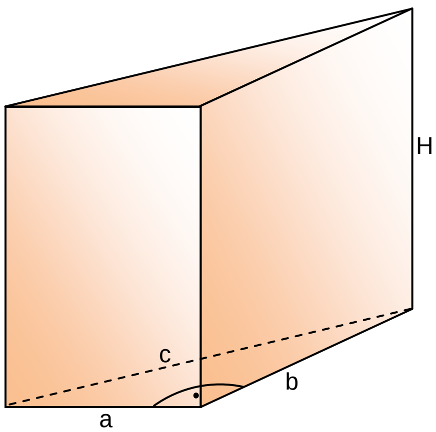


GRANIASTOSŁUPY PROSTE:

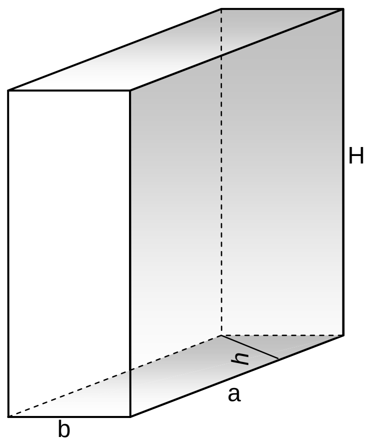
Przykłady:



GRANIASTOSŁUP PROSTY O PODSTAWIE TRAPEZU RÓWNORAMIENNEGO



GRANIASTOSŁUP PROSTY O PODSTAWIE TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO



GRANIASTOSŁUP PROSTY O PODSTAWIE RÓWNOLEGŁOBOKU

Własności: każdy graniastosłup prosty ma prostokątne ściany boczne (ściany w kształcie prostokąta).

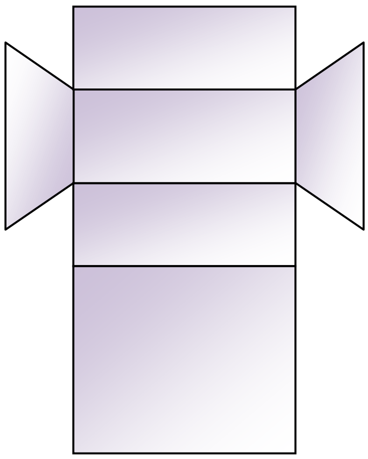
Objętość graniastosłupa: $$V = P_p \cdot H$$

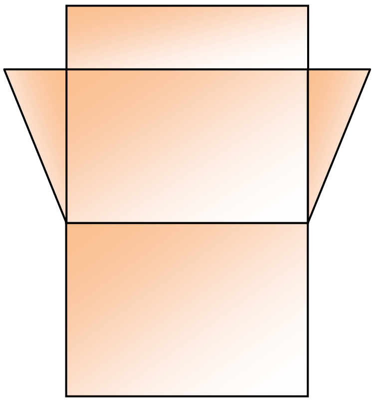
Pole podstawy: obliczamy ze wzoru właściwego dla figury znajdującej się w podstawie. W bryłach, których rysunki są przedstawione powyżej, wzory na pole podstawy są następujące:

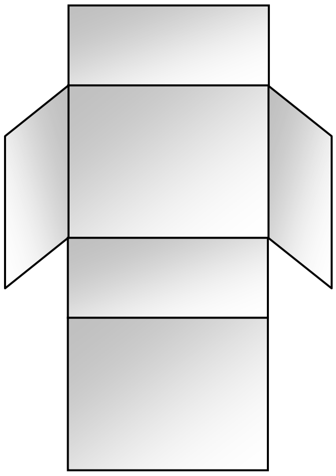
$$P_p = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad P_p = \frac{a \cdot b}{2} \qquad P_p = a \cdot h$$

Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2P_p + P_b$, gdzie P_b oznacza pole powierzchni bocznej, czyli sumę pól wszystkich ścian bocznych.

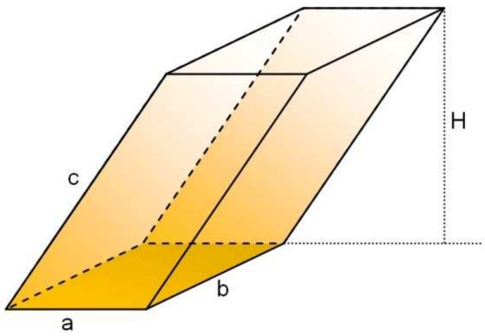
Siatki graniastosłupów prostych (zgodnie z rysunkami powyżej):







GRANIASTOSŁUP POCHYŁY:



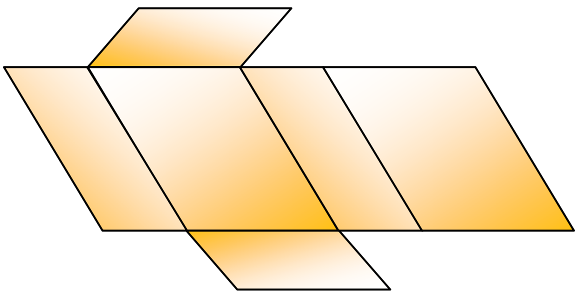
Własności: krawędzie boczne graniastosłupa pochyłego nie są prostopadłe do płaszczyzny podstawy. Ściany boczne są równoległobokami. Długość krawędzi bocznej graniastosłupa nie jest jego wysokością. Podstawą graniastosłupa pochyłego może być dowolny wielokąt (na rysunku wielokątem tym jest równoległobok).

Objętość graniastosłupa: $$V = P_p \cdot H$$

Pole powierzchni całkowitej: Suma pól wszystkich ścian, czyli suma pól dwóch podstaw i wszystkich ścian bocznych.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

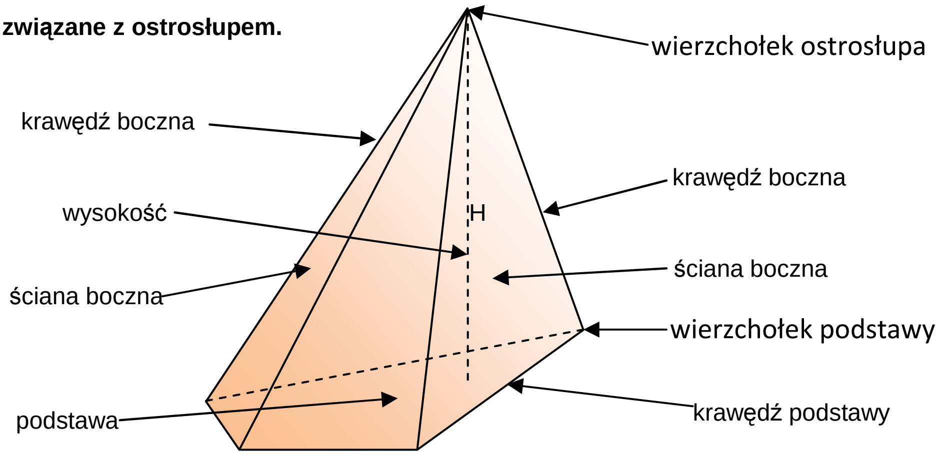
Siatka graniastosłupa pochyłego (zgodnie z rysunkiem powyżej):



4. OSTROSŁUPY.

Ostrosłup: Wielościan, którego jedna ściana (zwana podstawą) jest dowolnym wielokątem, a wszystkie pozostałe ściany (zwane ścianami bocznymi) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Pojęcia i własności związane z ostrosłupem.



Wysokość ostrosłupa: Odległość pomiędzy wierzchołkiem ostrosłupa a podstawą dolną.

Objętość ostrosłupa: Objętość każdego ostrosłupa obliczamy ze wzoru:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} P_p \cdot H}$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa: Suma pól wszystkich ścian bocznych ostrosłupa. Pole powierzchni bocznej oznaczamy zwykle jako P_b.

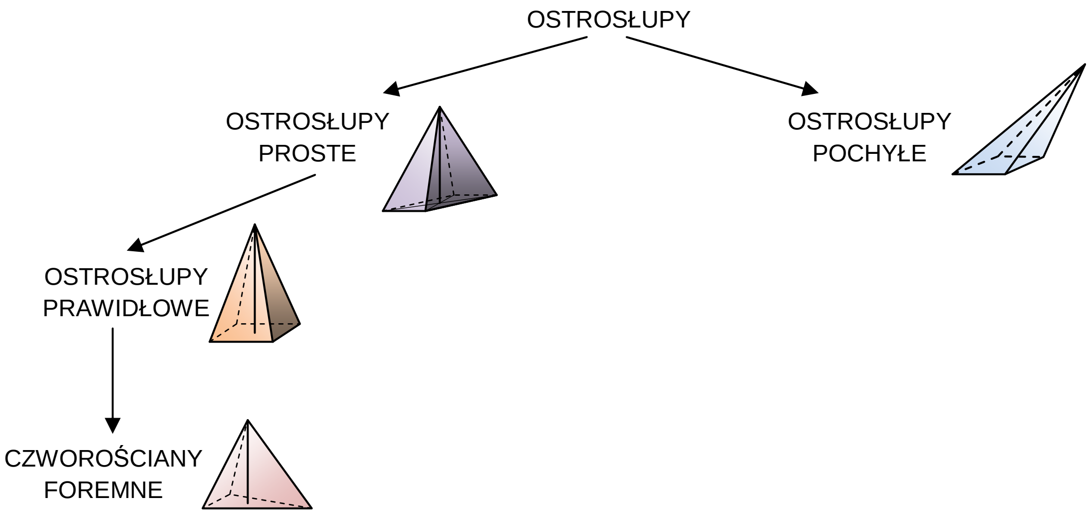
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa: Suma pól wszystkich ścian ostrosłupa, czyli suma pola podstawy i wszystkich ścian bocznych.

$$\boxed{P_c = P_p + P_b}$$

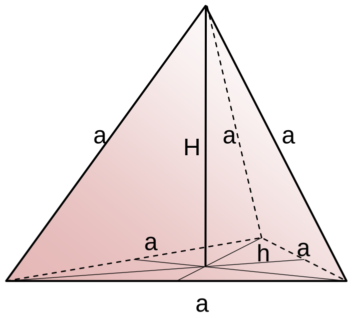
Własności ostrosłupa: Jeśli ostrosłup ma podstawę, którą jest n – kąt (wielokąt o n bokach), to:

- ilość ścian ostrosłupa wynosi n + 1,
- ilość krawędzi ostrosłupa wynosi 2n,
- ilość wierzchołków ostrosłupa wynosi n + 1.

Klasyfikacja ostrosłupów:



CZWOROŚCIAN FOREMNY



Definicja czworościanu foremnego – wielokąt foremny – ostrosłup, którego wszystkie cztery ściany są identycznymi (przystającymi) trójkątami równobocznymi.

Własności: wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, wszystkie sześć krawędzi ma taką samą długość.
Kąty między sąsiednimi ścianami są równe i wynoszą około 70,5°.
Wysokość jest opuszczona na punkt podstawy, który jest punktem przecięcia się wysokości tej podstawy. Ponieważ podstawa jest trójkątem równobocznym, to wysokości te dzielą się wzajemnie w stosunku 2 : 1 (dłuższa część wysokości to dwie trzecie, a krótsza to jedna trzecia wysokości).

Objętość czworościanu foremnego:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

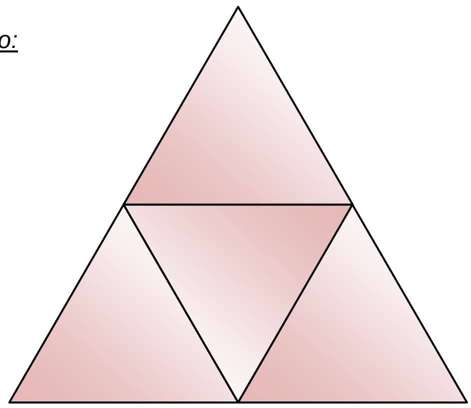
Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego:

$$P_c = 4 \cdot P_\Delta = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

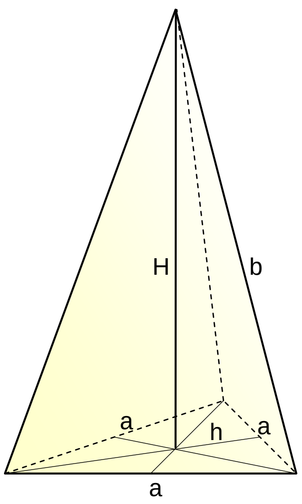
Wysokość czworościanu foremnego:

$$H = a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Siatka czworościanu foremnego:



OSTROSŁUP PRAWIDŁOWY TRÓJKĄTNY



Definicja ostrosłupa prawidłowego trójkątnego – ostrosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt równoboczny.

Własności: wszystkie trzy ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.
Wysokość jest opuszczona na punkt podstawy, który jest punktem przecięcia się wysokości tej podstawy. Ponieważ podstawa jest trójkątem równobocznym, to wysokości te dzielą się wzajemnie w stosunku 2 : 1 (dłuższa część wysokości to dwie trzecie, a krótsza to jedna trzecia wysokości).

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

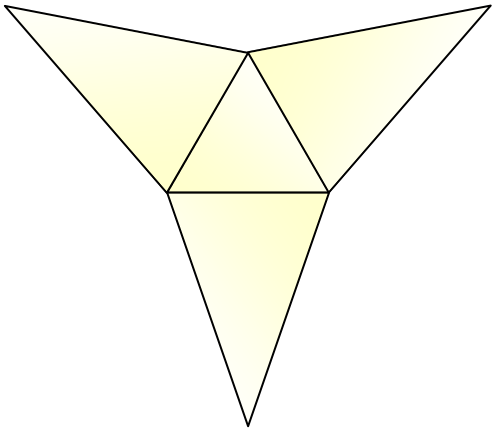
Pole podstawy to pole trójkąta równobocznego:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

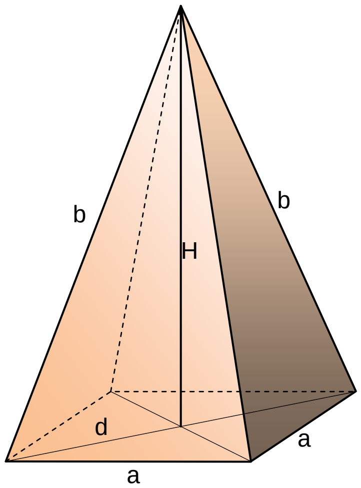
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego:

$$P_c = P_p + 3P_\Delta$$

Siatka ostrosłupa prawidłowego trójkątnego:



OSTROSŁUP PRAWIDŁOWY CZWOROKĄTNY:



Definicja ostrosłupa prawidłowego czworokątnego – ostrosłup prosty, którego podstawą jest kwadrat.

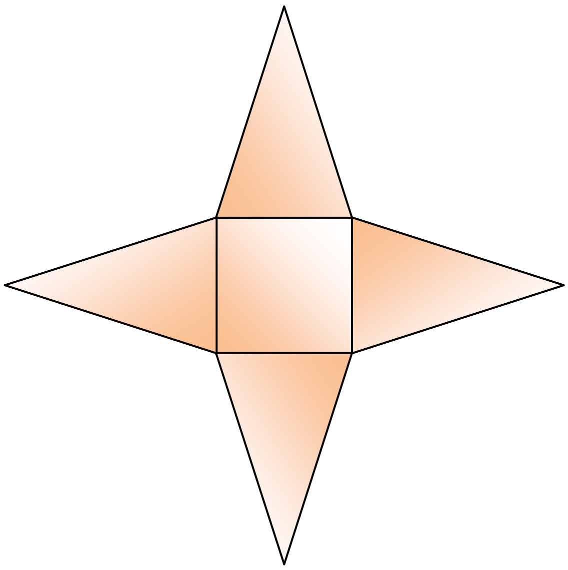
Własności: wszystkie cztery ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.
Wysokość jest opuszczona na punkt podstawy, który jest punktem przecięcia się przekątnych tej podstawy.

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego: $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

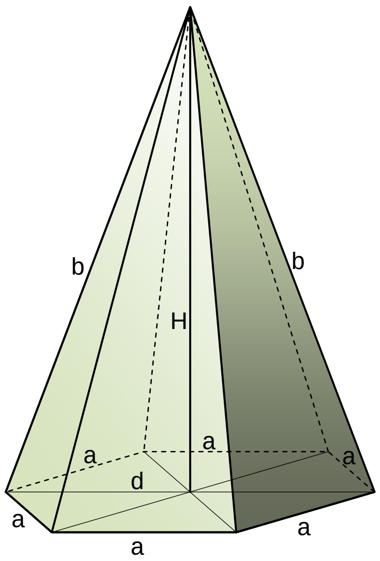
Pole podstawy to pole kwadratu: $P_p = a^2$ lub $P_p = \frac{d^2}{2}$

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego: $P_c = P_p + 4P_{\Delta}$

Siatka ostrosłupa prawidłowego czworokątnego:



OSTROSŁUP PRAWIDŁOWY SZEŚCIOKĄTNY:



Definicja ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego – ostrosłup prosty, którego podstawą jest sześciokąt foremny.

Własności: wszystkie sześć ścian bocznych to przystające trójkąty równoramienne. Wysokość jest opuszczona na punkt podstawy, który jest punktem przecięcia się dłuższych przekątnych tej podstawy.

Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

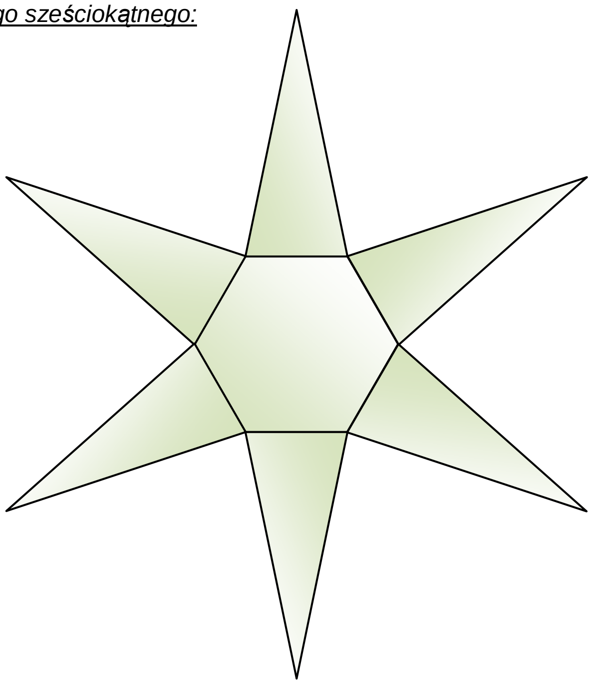
Pole podstawy to pole sześciokąta foremnego:

$$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

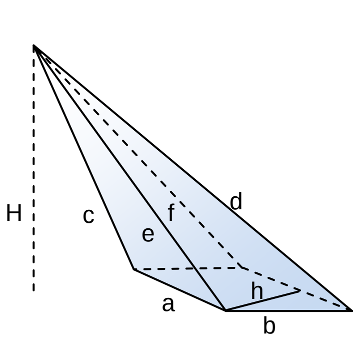
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego:

$$P_c = P_p + 6P_\Delta$$

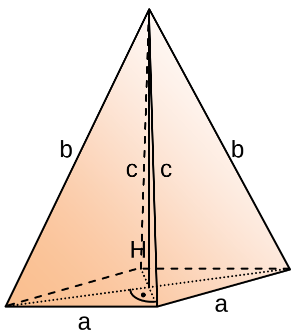
Siatka ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego:



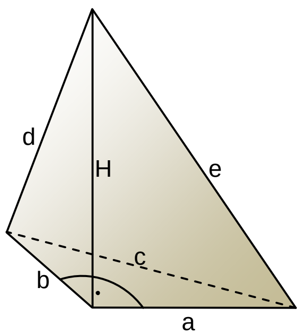
INNE OSTROSŁUPY



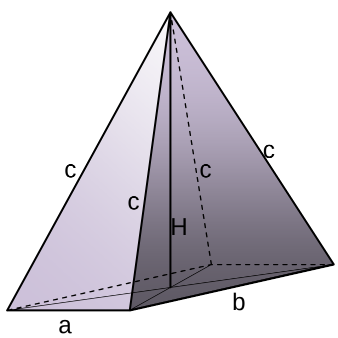
OSTROSŁUP POCHYŁY O PODSTAWIE RÓWNOLEGŁOBOKU



OSTROSŁUP PROSTY O PODSTAWIE ROMBU



OSTROSŁUP POCHYŁY O PODSTAWIE TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO



OSTROSŁUP PROSTY O PODSTAWIE PROSTOKĄTA

Własności: każdy ostrosłup ma ściany boczne w kształcie trójkątów.

Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

Pole podstawy: obliczamy z właściwego wzoru dla figury znajdującej się w podstawie. W bryłach, których rysunki są przedstawione powyżej, wzory na pole podstawy są następujące:

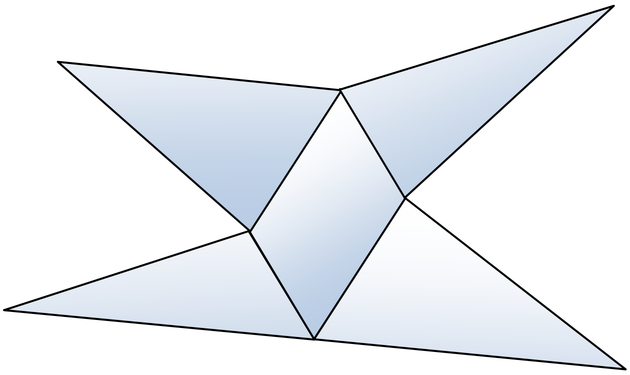
$$P_p = a \cdot h \qquad P_p = \frac{e \cdot f}{2} \qquad P_p = \frac{a \cdot b}{2} \qquad P_p = a \cdot b$$

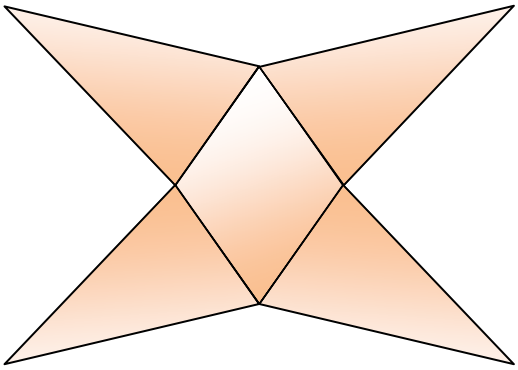
Pole powierzchni całkowitej:

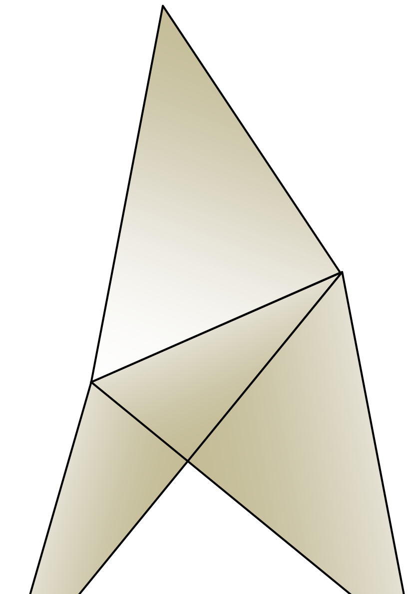
$$P_c = P_p + P_b$$

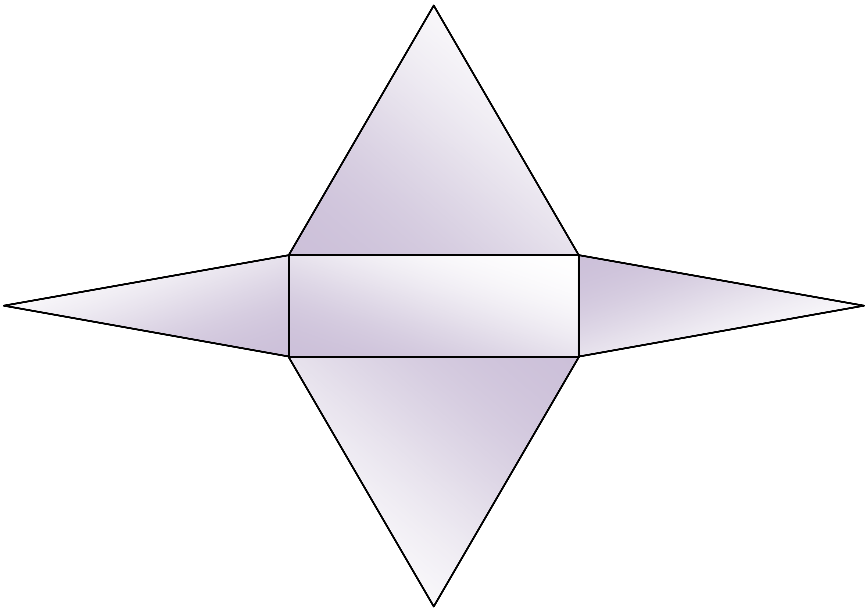
gdzie P_b oznacza pole powierzchni bocznej, czyli sumę pól wszystkich ścian bocznych.

Siatki graniastosłupów prostych (zgodnie z rysunkami powyżej):









5. BRYŁY OBROTOWE.

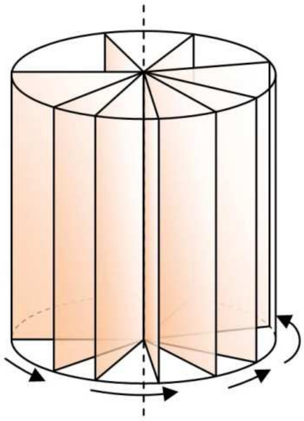
Bryła obrotowa – to figura geometryczna w przestrzeni, która jest zbiorem wszystkich punktów przestrzeni wyznaczonych przez obrót figury płaskiej wokół dowolnej osi obrotu o kąt 360°.

UWAGA! Powyższe zdanie nie jest definicją lecz jedynie opisem wystarczającym dla potrzeb szkolnych.

Rodzaje i określenia definicyjne podstawowych brył obrotowych:

Walec – bryła obrotowa powstająca na skutek obrotu prostokąta względem osi zawierającej jeden z boków prostokąta.

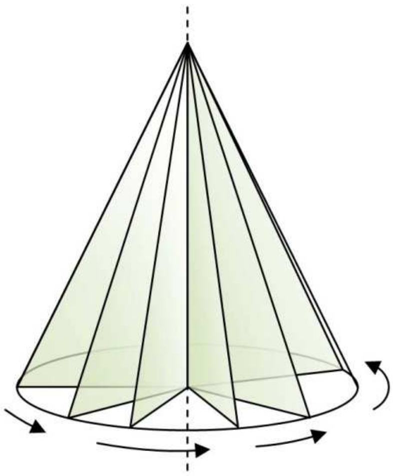
Sposób powstawania walca w wyniku obrotu prezentuje rysunek:



Obracający się prostokąt „zakreśla" w przestrzeni figurę geometryczną zwaną walcem. Osią obrotu jest prosta zawierająca jeden z boków prostokąta.

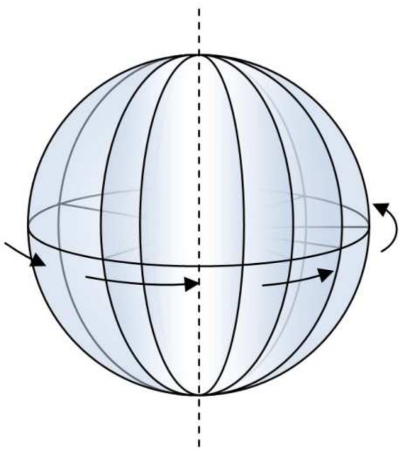
Stożek – bryła obrotowa powstająca na skutek obrotu trójkąta prostokątnego względem osi zawierającej jedną z przyprostokątnych tego trójkąta.

Sposób powstawania stożka w wyniku obrotu prezentuje rysunek:



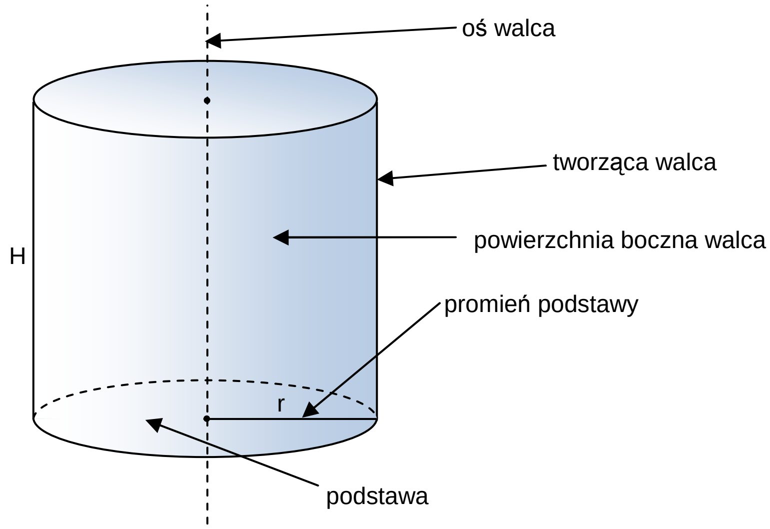
Obracający się trójkąt „zakreśla" w przestrzeni figurę geometryczną zwaną stożkiem. Osią obrotu jest prosta zawierająca jeden z boków przyprostokątnych trójkąta.

Kula – bryła obrotowa powstająca na skutek obrotu koła (lub półkola) względem prostej zawierającej średnicę.



Obracające się koło „zakreśla" w przestrzeni figurę geometryczną zwaną kulą. Osią obrotu jest prosta zawierająca średnicę tego koła.

WALEC



Pole podstawy walca (pole koła):

$$P_p = \pi r^2$$

Objętość walca:

$$V = P_p \cdot H$$ czyli $$V = \pi r^2 \cdot H$$

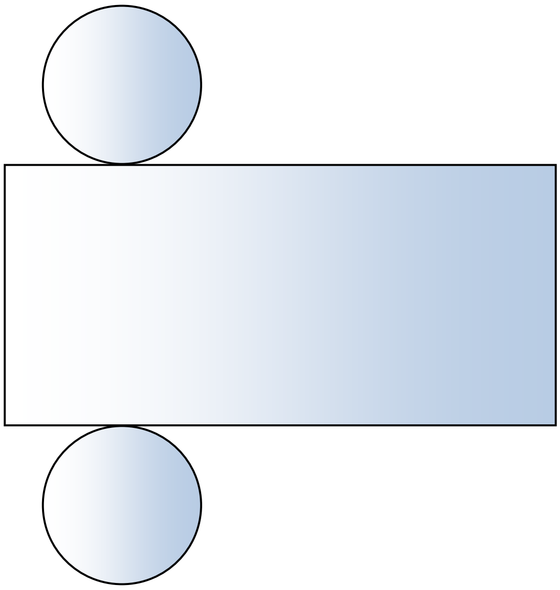
Pole powierzchni bocznej walca:

$$P_b = 2\pi r \cdot H$$

Pole powierzchni całkowitej walca:

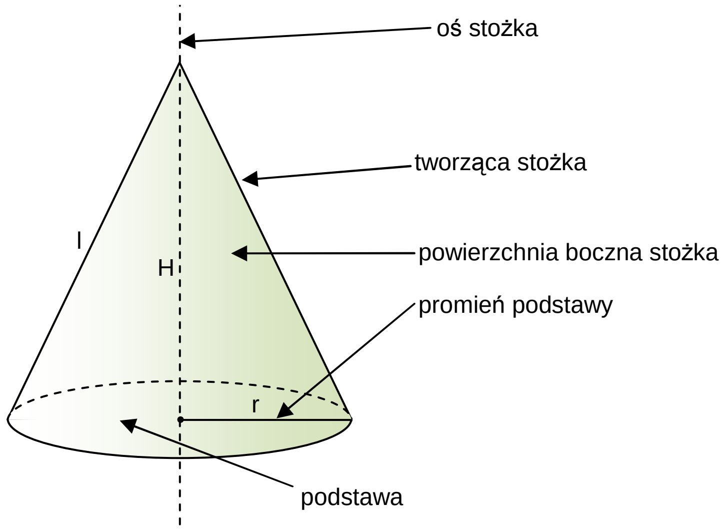
$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot H$$

Siatka walca:



Powierzchnia boczna walca jest prostokątem (po „rozłożeniu” na płaszczyznę), którego długość jest równa obwodowi podstawy walca, a szerokość jest równa wysokości (tworzącej) walca.

STOŻEK



Pole podstawy stożka (pole koła):

$$P_p = \pi r^2$$

Objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$ czyli $$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$$

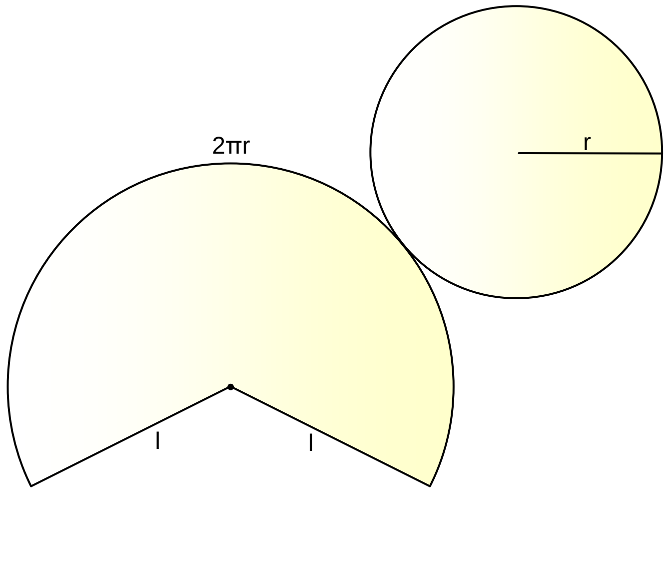
Pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_b = \pi r l$$

Pole powierzchni całkowitej stożka:

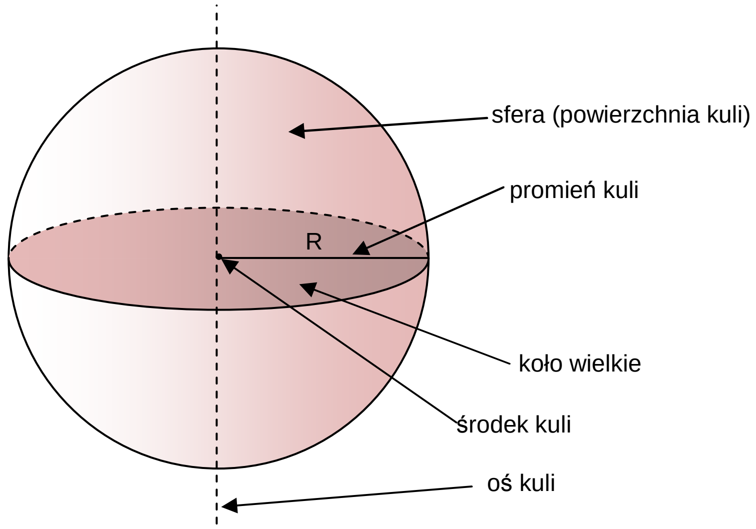
$$P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

Siatka stożka:



Powierzchnia boczna stożka, po „rozłożeniu" na płaszczyznę, jest wycinkiem koła, którego promień jest równy tworzącej stożka, a łuk na którym oparty jest wycinek ma długość równą długości obwodu podstawy stożka.

KULA



Objętość kuli:

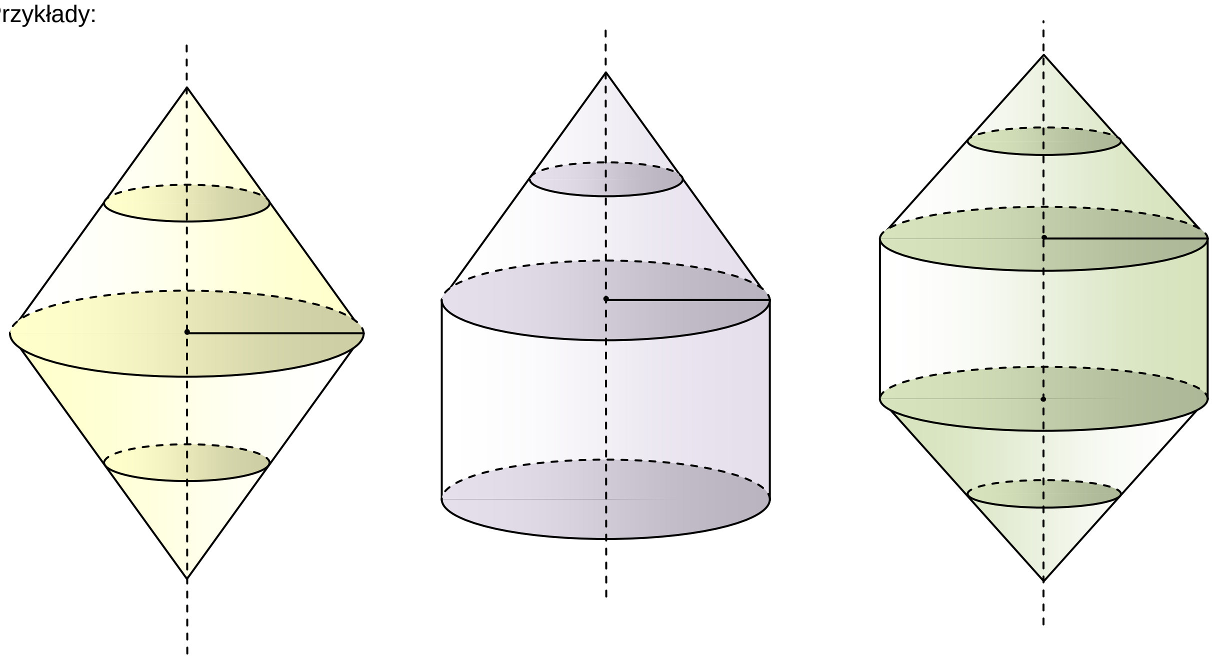
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Pole powierzchni kuli (pole sfery):

$$P_c = 4 \pi R^2$$

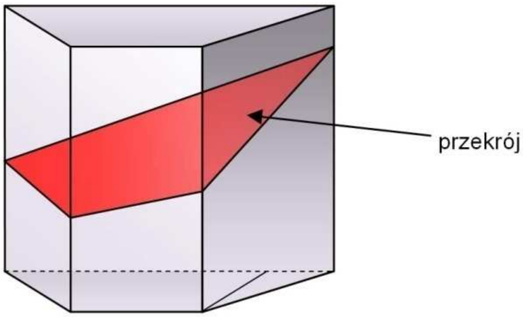
INNE BRYŁY OBROTOWE

Przykłady:



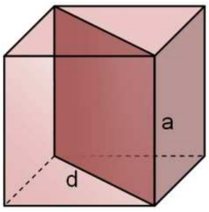
6. PRZEKROJE BRYŁ

Przekrój bryły: Przekrojem bryły nazywamy figurę geometryczną płaską, która jest częścią wspólną pewnej płaszczyzny i bryły.



Typowe przekroje brył (przykłady):

Przekrój sześcianu płaszczyzną zawierającą przekątne podstaw.

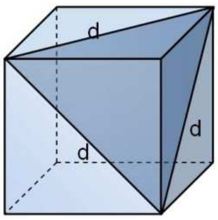


Przekrój jest prostokątem, którego wymiary to:

a – krawędź sześcianu,
d – przekątna podstawy, którą można obliczyć ze wzoru:

$$d = a\sqrt{2}$$

Przekrój sześcianu płaszczyzną zawierającą trzy przekątne sąsiadujących ze sobą ścian.

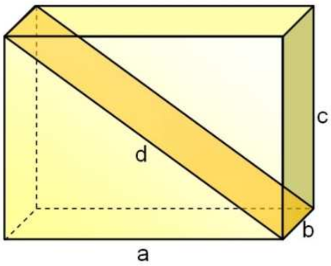


Przekrój jest trójkątem równobocznym, którego boki to:

d – przekątne ścian, którą można obliczyć ze wzoru:

$$d = a\sqrt{2}$$

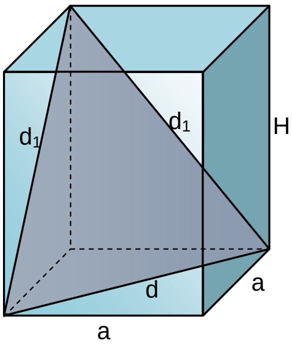
Przekrój prostopadłościanu płaszczyzną zawierającą przeciwległe krawędzie obu podstaw.



Przekrój jest prostokątem, którego boki to:

b – krawędź podstawy,
d – przekątna ściany bocznej, którą można obliczyć z twierdzenia Pitagorasa.

Przekrój graniastosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i dokładnie jeden wierzchołek przeciwległej podstawy.



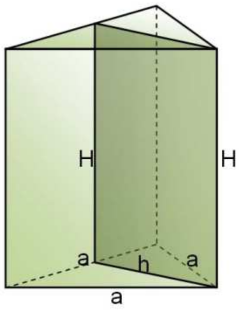
Przekrój jest trójkątem równoramiennym, którego boki to:

d – przekątna podstawy, którą można obliczyć ze wzoru

$$d = a\sqrt{2}$$

d_1 – przekątna ściany bocznej, którą można obliczyć z twierdzenia Pitagorasa.

Przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną zawierającą wysokości podstaw.

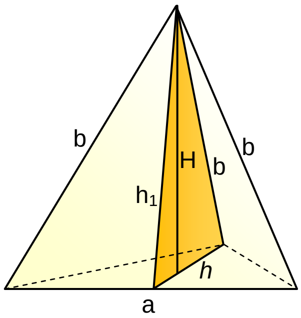


Przekrój jest prostokątem, którego boki to:

H – krawędź boczna,
h – wysokość podstawy, która można obliczyć ze wzoru:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną zawierającą wysokość podstawy i wierzchołek bryły.



Przekrój jest trójkątem, którego boki to:

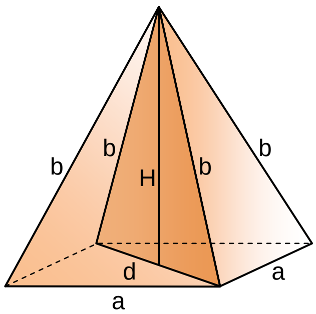
h – wysokość podstawy, która można obliczyć ze wzoru:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b – krawędź boczna
h_1 – wysokość ściany bocznej, którą można obliczyć z twierdzenia Pitagorasa.

Wysokością przekroju jest wysokość ostrosłupa H.

Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i wierzchołek bryły.



Przekrój jest trójkątem równoramiennym, którego boki to:

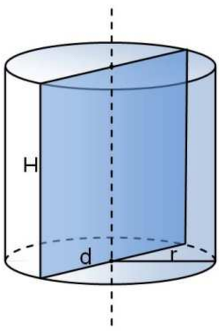
d – przekątna podstawy, którą można obliczyć ze wzoru

$$d = a\sqrt{2}$$

b – krawędź boczna.

Wysokością przekroju jest wysokość ostrosłupa H.

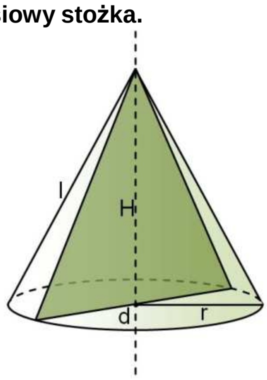
Przekrój osiowy walca.



Przekrój jest prostokątem, którego boki to:

H – tworząca walca (równa wysokości),
d – średnica podstawy.

Przekrój osiowy stożka.



Przekrój jest trójkątem równoramiennym, którego boki to:

l – tworząca stożka,
d – średnica podstawy.

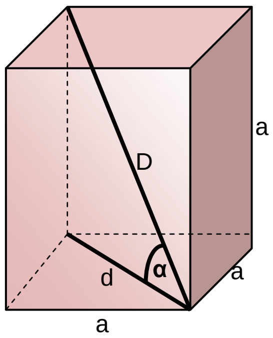
Wysokością przekroju jest wysokość stożka H.

7. KĄTY W BRYŁACH.

<u>*Rodzaje kątów w bryłach:*</u> W bryłach można wyróżnić kilka podstawowych rodzajów kątów:
- kąty płaskie pomiędzy krawędziami,
- kąty nachylenia krawędzi lub przekątnych do płaszczyzn zawierających ściany,
- kąty pomiędzy ścianami (kąty dwuścienne).

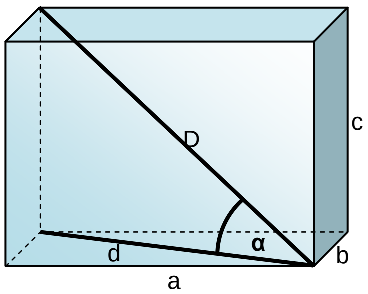
<u>*Typowe kąty w bryłach(przykłady):*</u>

Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy.



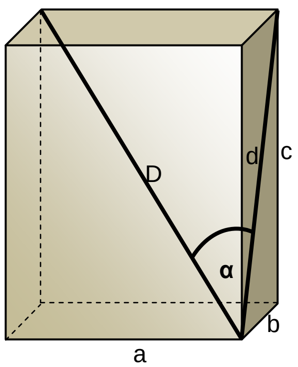
Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy przekątna bryły D z przekątną podstawy d.

Kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny podstawy.



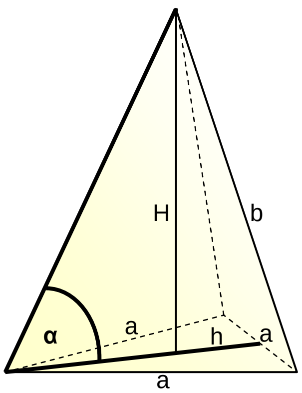
Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy przekątna bryły D z przekątną podstawy d.

Kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny ściany bocznej.



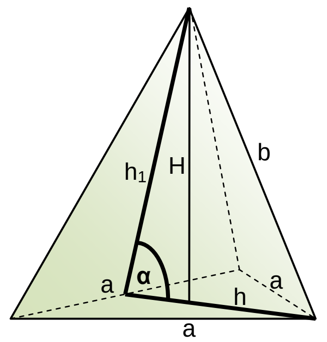
Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy przekątna bryły D z przekątną ściany bocznej d.

Kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy.



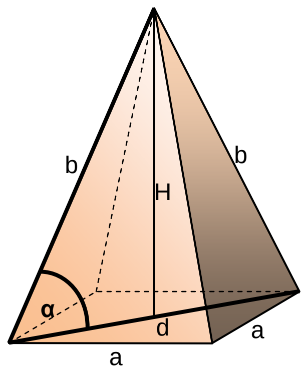
Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy krawędź boczna b z wysokością podstawy h.

Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy.



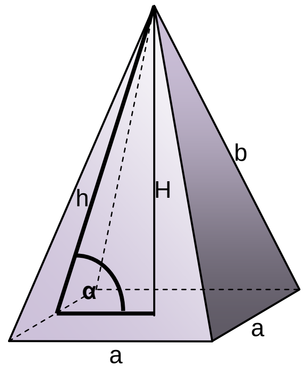
Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy wysokość ściany bocznej h_1 z wysokością podstawy h.

Kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy.



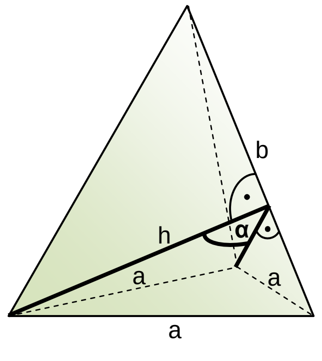
Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy krawędź boczna b z przekątną podstawy d.

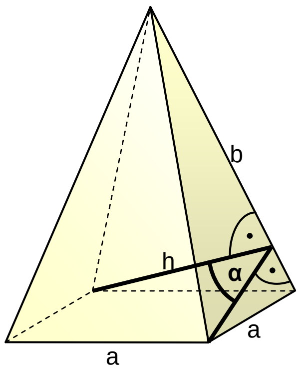
Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy.



Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy wysokość ściany bocznej h z odcinkiem podstawy łączącym koniec wysokości ściany bocznej z końcem wysokości ostrosłupa (odcinek ten ma długość równą połowie boku a).

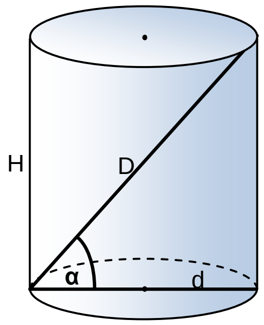
Kąt nachylenia ścian bocznych ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i trójkątnego.





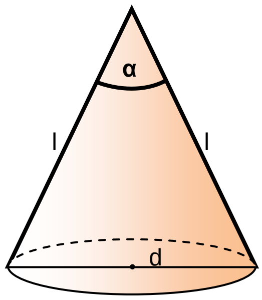
Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzą ze sobą dwie wysokości h sąsiednich ścian bocznych. Wysokości te opuszczone są na wspólną krawędź obu ścian, czyli krawędź boczną b.

Kąt, jaki tworzy przekątna przekroju osiowego walca z płaszczyzną podstawy.



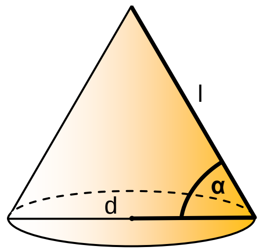
Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy przekątna przekroju osiowego D z średnicą podstawy d.

Kąt rozwarcia stożka.



Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzą dwie przeciwległe tworzące stożka l, należące do jednego przekroju osiowego.

Kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.



Kąt ten jest równy kątowi, jaki tworzy promień podstawy (średnica podstawy) z odpowiednią tworzącą stożka.

Opracował: Paweł Góralczyk

Gimnazjum Społeczne im. Lady Sue Ryder w Woli Batorskiej