PROCENTY I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Treść:

- zagadnienie elementarne

- zagadnienie wykraczające poza program

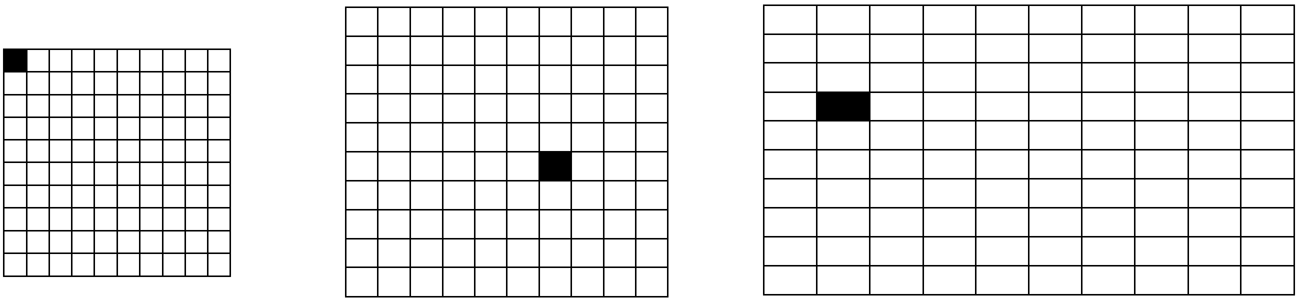
PROCENTY I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

1. Pojęcie procentu i promila.

Definicja procentu: Procent to setna część pewnej wielkości.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Na rysunku zamalowano 1 procent każdej z figur:



Definicja promila: Promil to tysięczna część pewnej wielkości.

$$1‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Z definicji wynika, że:

$$10‰ = 1\%$$
$$1‰ = 0{,}1\%$$

UWAGA! PROCENT ZAWSZE OZNACZA CZĘŚĆ PEWNEJ CAŁOŚCI, WIĘC STOSUJE SIĘ GO ZAWSZE W ODNIESIENIU DO KONKRETNYCH LICZB, WIELKOŚCI FIZYCZNYCH, ILOŚCI ITD…

---

2. Zamiana liczby do postaci procentu i do postaci promila.

<u>*Najczęściej stosowane liczby w postaci procentu*</u>:

$100\% = 1$	$20\% = \frac{1}{5}$
$50\% = \frac{1}{2}$	$10\% = \frac{1}{10}$
$25\% = \frac{1}{4}$	$75\% = \frac{3}{4}$

<u>*Zamiana liczby do postaci procentu:*</u> Aby zamienić liczbę do postaci procentu, należy tą liczbę pomnożyć przez 100%.

Przykład:

Liczbę $\frac{3}{5}$ zamień do postaci procentu.

Aby zamienić liczbę do postaci procentu, wykonujemy mnożenie przez 100% (pamiętając o skracaniu):

$$\frac{3}{\cancel{5}} \cdot \cancel{100}\% = 3 \cdot 20\% = 60\%$$

Przykład:

Liczbę $\frac{7}{15}$ zamień do postaci procentu.

Aby zamienić liczbę do postaci procentu, wykonujemy mnożenie przez 100% (pamiętając o skracaniu):

$$\frac{7}{\cancel{30}} \cdot \cancel{100}\% = \frac{7}{3} \cdot 10\% = \frac{70}{3}\% = 23\frac{1}{3}\%$$

Przykład:

Liczbę 0,035 zamień do postaci procentu.

Aby zamienić liczbę do postaci procentu, wykonujemy mnożenie przez 100% (pamiętając o przesuwaniu przecinka o dwa miejsca w prawo):

$$0{,}035 \cdot 100\% = 3{,}5\%$$

Zamiana liczby do postaci promila: Aby zamienić liczbę do postaci promila, należy tą liczbę pomnożyć przez 1000‰.

Przykład:

Liczbę $\frac{1}{125}$ zamień do postaci promila.

Aby zamienić liczbę do postaci promila, wykonujemy mnożenie przez 1000‰ (pamiętając o skracaniu):

$$\frac{1}{\cancel{125}} \cdot \cancel{1000}‰ = 1 \cdot 8‰ = 8‰$$

Przykład:

Liczbę 0,002 zamień do postaci promila.

Aby zamienić liczbę do postaci promila, wykonujemy mnożenie przez 1000‰ (pamiętając o przesuwaniu przecinka o trzy miejsca w prawo):

$$0{,}002 \cdot 1000‰ = 2‰$$

Zamiana procentu do postaci ułamka zwykłego lub dziesiętnego: Aby zamienić liczbę z postaci procentu do postaci ułamka zwykłego lub dziesiętnego, należy tą liczbę podzielić przez 100%.

Przykład:

45% zamień do postaci ułamka.

Aby zamienić procent do postaci ułamka, wykonujemy dzielenie przez 100% za pomocą kreski ułamkowej. Symbol procentu można od razu skrócić. Jeśli jest to możliwe, skracamy również ułamek:

$$45\% = \frac{\cancel{45}}{\cancel{100}} = \frac{9}{20}$$

Przykład:

2,8% zamień do postaci ułamka.

Aby zamienić procent do postaci ułamka, wykonujemy dzielenie przez 100% przesuwając przecinek o dwa miejsca w lewo i usuwając symbol procentu.

$$2{,}8\% = 0{,}028$$

Przykład:

$6\frac{2}{3}\%$ zamień do postaci ułamka.

Aby zamienić procent do postaci ułamka, wykonujemy dzielenie przez 100% mnożąc przez $\frac{1}{100}$ (odwrotność).

$$6\frac{2}{3}\% = 6\frac{2}{3}\% : 100\% = \frac{\cancel{20}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{100}} = \frac{1}{15}$$

<u>Zamiana promila do postaci ułamka zwykłego lub dziesiętnego:</u> Aby zamienić liczbę z postaci promila do postaci ułamka zwykłego lub dziesiętnego, należy tą liczbę podzielić przez 1000‰.

Przykład:

4‰ zamień do postaci ułamka.
Aby zamienić promil do postaci ułamka, wykonujemy dzielenie przez 1000‰ za pomocą kreski ułamkowej. Symbol promila można od razu skrócić. Jeśli jest to możliwe, skracamy również ułamek:

$$4‰ = \frac{\cancel{4}}{\cancel{1000}} = \frac{1}{250}$$

---

3. Obliczanie procentu danej liczby.

Aby obliczyć procent danej wielkości (liczby), należy procent pomnożyć przez liczbę, wcześniej zamieniając procent do postaci ułamka.

Przykład: *Oblicz 32% liczby 175.*

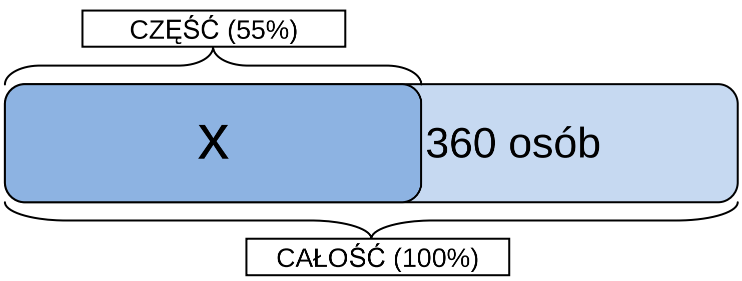
Wykonujemy mnożenie, zamieniając przy tym procent do postali ułamka zwykłego i skracając:

$$32\% \cdot 175 = \frac{\cancel{32}}{\cancel{100}} \cdot \cancel{175} = 8 \cdot 7 = 56$$

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 56.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„W wyborach do samorządu szkolnego oddano 360 ważnych głosów. 55% wszystkich głosów zostało oddanych na Piotra, który wygrał wybory. Oblicz, ile głosów w wyborach otrzymał Piotr?”*

Z analizy treści zadania wynika, że znana jest liczba wszystkich głosów (czyli 100% wszystkich głosów), natomiast nieznana jest liczba głosów oddanych w wyborach na Piotra. Wiemy natomiast jaka jest to część (55%) wszystkich głosów. Czyli znamy „całość”, ale nie znamy części tej całości. Wiemy jaki stanowi ona procent. Pełną analizę treści przedstawia schemat:



Można przedstawić tą sytuację za pomocą tabelki informacji, prowadzącej do rozwiązania proporcji:

360 osób	———	100%
x	———	55%

Rozwiązujemy proporcję, zgodnie z odpowiednią zasadą:

$$x = \frac{360 \cdot 55\%}{100\%} = 198$$

Odpowiedź: Piotr otrzymał 198 głosów w wyborach do samorządu.

---

4. Obliczanie liczby, gdy znany jest jej procent.

Aby obliczyć liczbę znając jej procent, należy ułożyć i rozwiązać odpowiednią proporcję lub równanie.

Przykład: *Oblicz liczbę, której 24% wynosi 42.*

Rozwiązanie za pomocą równania: Oznaczamy szukaną liczbę przez x. Wiemy, że 24% liczby x wynosi 42. Zapisujemy to jako równanie, a następnie zamieniamy procent do postaci ułamka zwykłego i rozwiązujemy równanie:

$$24\% \cdot x = 42$$

$$\frac{24}{100} x = 42 \quad \Big| : \frac{24}{100}$$

$$x = 42 : \frac{24}{100}$$

$$x = 42 \cdot \frac{100}{24}$$

$$x = 175$$

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 175.

Rozwiązanie za pomocą proporcji: Oznaczamy szukaną liczbę przez x i tworzymy odpowiednią tabelę informacji.

24% ———— 42
100% ———— x

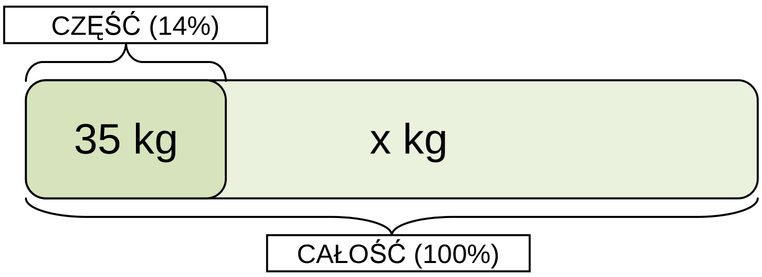
Rozwiązujemy proporcję:

$$x = \frac{100\% \cdot 42}{24} = 175$$

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 175.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„14% wagi ziemniaków stanowi skrobia. Ile należałoby wziąć kilogramów ziemniaków, aby uzyskać z nich 35 kg skrobi ziemniaczanej?”*

Z analizy treści zadania wynika, że nieznana jest waga wszystkich ziemniaków (czyli 100% wagi), natomiast znana jest waga skrobi ziemniaczanej, czyli część wagi ziemniaków. Wiemy też, jaka to część (14% wagi wszystkich ziemniaków). Czyli nie znamy „całości”, znamy część tej całości i wiemy jaki stanowi ona procent. Pełną analizę treści przedstawia schemat:



Można przedstawić tą sytuację za pomocą tabelki informacji, prowadzącej do rozwiązania proporcji:

35 kg ———— 14%
x ———— 100%

Rozwiązujemy proporcję, zgodnie z odpowiednią zasadą:

$$x = \frac{35 \cdot 100\,\%}{14\,\%} = 250$$

Odpowiedź: Aby uzyskać 35 kg skrobi należy wziąć 250 kg ziemniaków.

---

5. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba.

Aby obliczyć, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, należy ułożyć i rozwiązać odpowiednią proporcję lub równanie. Można również posłużyć się pojęciem stosunku dwóch liczb.

Przykład: *Jakim procentem liczby 125 jest liczba 85?*

Rozwiązanie za pomocą równania: Oznaczamy przez x szukany procent. Wiemy, że x% liczby 125 ma być równe 85. Zapisujemy to jako równanie, a następnie rozwiązujemy równanie. Wynik otrzymujemy w postaci ułamka zwykłego, więc ostatnią czynnością będzie zamiana tego ułamka do postaci procentu.

$$x \cdot 125 = 85 \quad \Big|\, : 125$$

$$x = \frac{85}{125}$$

$$x = \frac{17}{25} \cdot 100\,\%$$

$$x = 68\,\%$$

Odpowiedź: Liczba 85 stanowi 68 % liczby 125.

Rozwiązanie za pomocą proporcji: Oznaczamy przez x szukany procent. i tworzymy odpowiednią tabelę informacji.

x ——— 85
100% ——— 125

Rozwiązujemy proporcję:

$$x = \frac{100\,\% \cdot 85}{125} = 68\,\%$$

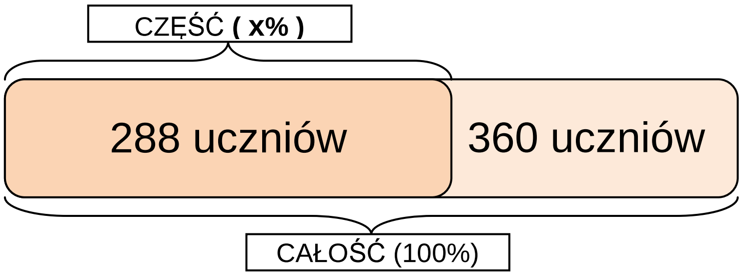
Liczba 85 stanowi 68 % liczby 125.

Rozwiązanie za pomocą stosunku liczb: Tworzymy stosunek obu liczb. W ten sposób otrzymujemy ułamek zwykły, który mówi jaką częścią jednej liczby jest druga. Ułamek ten zamieniamy do postaci procentu (mnożąc przez 100%).

$$\frac{85}{125} \cdot 100\,\% = 68\,\%$$

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Spośród 360 uczniów szkoły, 288 posiada swój własny komputer. Oblicz, jaki procent uczniów tej szkoły posiada komputer?”*

Z analizy treści zadania wynika, że znana jest liczba wszystkich uczniów szkoły (czyli 100%) i znana jest ilość uczniów posiadających komputer (część uczniów szkoły). Nie wiadomo jedynie, jakim procentem uczniów szkoły są uczniowie posiadający komputer. Czyli znamy „całość”, znamy część tej całości lecz nie wiemy jaki to procent. Pełną analizę treści przedstawia schemat:



Można przedstawić tą sytuację za pomocą tabelki informacji, prowadzącej do rozwiązania proporcji:

360 ——— 100%
288 ——— x%

Rozwiązujemy proporcję, zgodnie z odpowiednią zasadą:

$$x = \frac{288 \cdot 100\%}{360} = 80\%$$

Odpowiedź: 80% uczniów szkoły posiada komputer.

---

6. Powiększanie i zmniejszanie liczby o procent.

Aby zwiększyć (zmniejszyć) daną liczbę o procent, należy obliczyć procent z tej liczby, a następnie dodać (odjąć) otrzymany wynik do danej liczby.

Przykład: *Liczbę 90 powiększ o 20%.*

Obliczamy 20% z liczby 90 (dowolną metodą):

$$20\% \cdot 90 = \frac{20}{100} \cdot 90 = 18$$

Dodajemy otrzymaną liczbę do liczby 90:

$$90 + 18 = 108$$

Odpowiedź: Gdy powiększymy liczbę 90 o 20% otrzymamy liczbę 108.

Przykład: *Liczbę 240 zmniejsz o 15%.*

Obliczamy 15% z liczby 240 (dowolną metodą):

$$15\% \cdot 240 = \frac{15}{100} \cdot 240 = 36$$

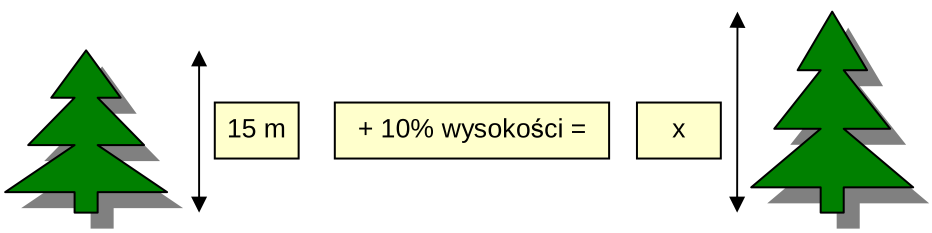
Odejmujemy otrzymaną liczbę od liczby 240:

$$240 - 36 = 204$$

Odpowiedź: Gdy zmniejszymy liczbę 240 o 15% otrzymamy liczbę 204.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„W ciągu roku drzewo urosło o około 10%. Rok temu drzewo miało 15 m wysokości. Oblicz jaką wysokość ma obecnie to drzewo?”*

Wiemy, jaką wysokość miało drzewo dawniej, a chcemy obliczyć jego obecną wysokość. Pełną analizę treści przedstawia schemat:



Należy powiększyć liczbę 15 m o 10%:

$$10\% \cdot 15 = \frac{10}{100} \cdot 15 = 1{,}5$$

$$15 + 1{,}5 = 16{,}5$$

Odpowiedź: Drzewo ma obecnie 16,5 metrów wysokości.

7. Poszukiwanie liczby, znając jej wartość po zwiększeniu (zmniejszeniu) o procent.

Aby znaleźć liczbę, znając jej wartość po zwiększeniu (zmniejszeniu) o procent, należy obliczyć, jakim procentem liczby jest liczba powiększona (zmniejszona) o procent, a następnie rozwiązać odpowiednią proporcję.

Przykład: *Znajdź liczbę, wiedząc, że gdy zwiększymy ją o 30% to otrzymamy 143.*

Szukana liczba została powiększona o 30%, więc liczba 143 to 130% liczby szukanej (100% + 30% = 130%). Układamy odpowiednią proporcję:

$$\begin{array}{rcl} x & \text{———} & 100\% \\ 143 & \text{———} & 130\% \end{array}$$

Rozwiązujemy otrzymaną proporcję:

$$x = \frac{143 \cdot 100\%}{130\%} = 110$$

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 110.

Przykład: *Znajdź liczbę, wiedząc, że gdy zmniejszymy ją o 20% to otrzymamy 120.*

Szukana liczba została zmniejszona o 20%, więc liczba 120 to 80% liczby szukanej (100% – 20% = 80%). Układamy odpowiednią proporcję:

$$\begin{array}{rcl} x & \text{———} & 100\% \\ 120 & \text{———} & 80\% \end{array}$$

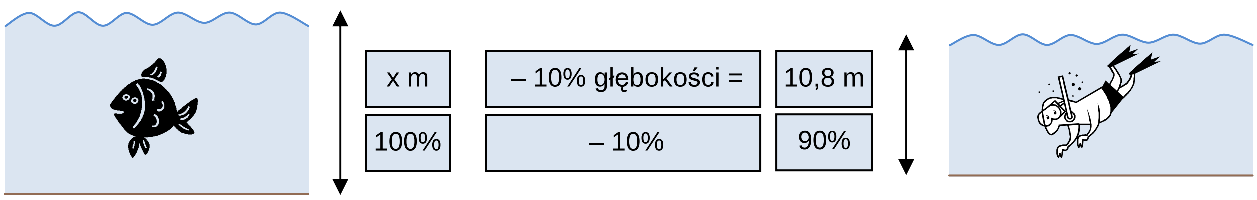
Rozwiązujemy otrzymaną proporcję:

$$x = \frac{120 \cdot 100\%}{80\%} = 150$$

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 150.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Podczas suszy poziom wody w jeziorze obniżył się o 10% w stosunku do poziomu normalnego. Obecnie średnia głębokość jeziora wynosi 10,8 metrów. Oblicz, jaką głębokość miało to jezioro przed nastaniem suszy?”*

Wiemy jaką głębokość ma obecnie jezioro, a chcemy obliczyć jego głębokość przed nastaniem suszy. Pełną analizę treści przedstawia schemat:



Układamy odpowiednią proporcję i rozwiązujemy ją:

$$\begin{array}{rcl} x & \text{———} & 100\% \\ 10{,}8 & \text{———} & 90\% \end{array}$$

$$x = \frac{10{,}8 \cdot 100\%}{90\%} = 12$$

Odpowiedź: Przed nastaniem suszy średnia głębokość jeziora wynosiła 12 metrów.

8. Obliczanie, o ile procent jedna liczba jest większa (mniejsza) od drugiej?

Aby obliczyć, o ile procent jedna liczba jest większa (mniejsza) od drugiej, należy odjąć od siebie obie liczby i ułożyć proporcję, w której 100% to liczba druga. Następnie trzeba rozwiązać tą proporcję.

Przykład: *O ile procent liczba 93 jest większa od 75?.*

Różnica liczb wynosi 18 (93 – 75 = 18). Układamy proporcję, w której 100% to liczba 75:

75 ———— 100%
18 ———— x%

Rozwiązujemy otrzymaną proporcję:

$$x = \frac{18 \cdot 100\,\%}{75} = 24\,\%$$

Odpowiedź: Liczba 93 jest o 24% większa od 75.

Przykład: *O ile procent liczba 34 jest mniejsza od 40?*

Różnica liczb wynosi 6 (40 – 34 = 6). Układamy proporcję, w której 100% to liczba 40:

40 ———— 100%
6 ———— x%

Rozwiązujemy otrzymaną proporcję:

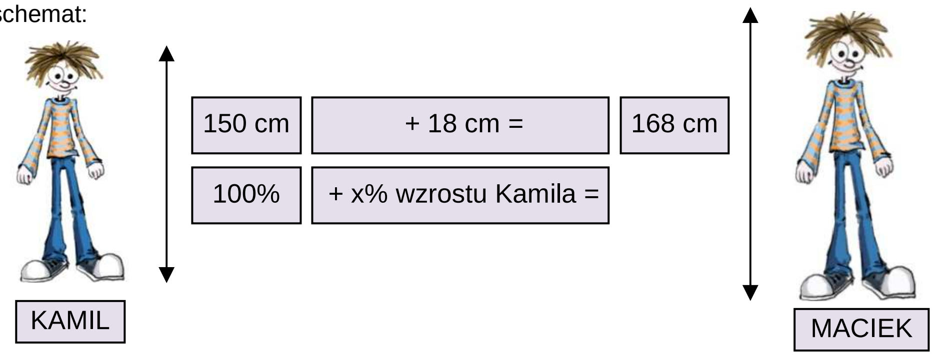
$$x = \frac{6 \cdot 100\,\%}{40} = 15\,\%$$

Liczba 34 jest o 15% mniejsza od 40.

UWAGA! Jeśli jedna liczba jest o ileś procent większa od drugiej, to wcale nie oznacza, że liczba druga jest o ten sam procent mniejsza od pierwszej. Świadczy o tym przykład: Liczba 15 jest większa od liczby 12 o 25% (bo jest większa o 3, a liczba 3 stanowi 25% z liczby 12). Natomiast liczba 12 jest o 20% mniejsza od 15 (bo jest mniejsza o 3, a liczba 3 stanowi 20% z liczby 15).

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Maciek ma 168 cm wzrostu, a jego młodszy brat Kamil ma 150 cm wzrostu. Oblicz, o ile procent wyższy jest Maciek od Kamila?”*

Wiemy jaki wzrost ma Maciek i Kamil. Różnica wzrostu wynosi 18 centymetrów. Mamy odpowiedzieć na pytanie, o ile procent Maciek jest wyższy od Kamila, a wiadomo, że Maciek jest o 18 centymetrów wyższy w porównaniu z Kamilem. Pełną analizę treści przedstawia schemat:



Układamy odpowiednią proporcję i rozwiązujemy ją:

150 ———— 100%
18 ———— x%

$$x = \frac{18 \cdot 100\,\%}{150} = 12\,\%$$

Odpowiedź: Maciek jest o 12% wyższy od Kamila.

Podwyżki i obniżki cen.

Zadania dotyczące podwyżek i obniżek cen rozwiązujemy w oparciu o metodę dotyczącą powiększania (zmniejszania) liczby o procent, poszukiwania liczby, znając jej wartość po zwiększeniu (zmniejszeniu) o procent lub obliczania, o ile procent jedna liczba jest większa (mniejsza) od drugiej.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Cenę nart zwiększono w sezonie zimowym o 10%. Oblicz, ile kosztują narty w zimie, za które przed sezonem trzeba było zapłacić 1200 złotych”*

W tym zadaniu znamy starą cenę (1200 zł), a chcemy obliczyć nową, powiększoną o 10%. Jest to sytuacja, w której liczbę 1200 trzeba powiększyć o procent. Pełną analizę treści przedstawia schemat:

STARA CENA

1200 zł | + 10% z 1200 zł = | x zł

NOWA CENA

Wykonujemy obliczenia zgodnie z metodą:

$$10\% \cdot 1200 = \frac{10}{100} \cdot 1200 = 120 \qquad 1200 + 120 = 1320$$

Odpowiedź: Narty w zimie kosztują 1320 zł.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„W sklepie obniżono wszystkie ceny o 20%. Ile kosztował przed obniżką cen telewizor, za który obecnie trzeba zapłacić 2000 złotych?”*

W tym zadaniu chcemy znaleźć starą cenę, znając cenę nową (2000 zł). Wiemy, że nowa cena powstała przez odjęcie 20% ze starej ceny. Jest to sytuacja, w której trzeba znaleźć liczbę, znając jej wartość po zmniejszeniu o 20% (2000 zł). Pełną analizę treści przedstawia schemat:

STARA CENA

x zł	- 20% z x zł	2000 zł
100%	- 20%	80%

NOWA CENA

Wykonujemy obliczenia układając wcześniej proporcję:

x ———— 100%
2000 ———— 80%

$$x = \frac{2000 \cdot 100\%}{80} = 2500$$

Odpowiedź: Telewizor kosztował dawniej 2500 złotych.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Cenę spodni obniżono w sklepie z 120 złotych na 96 zł. O ile procent obniżono cenę?”*

W tym zadaniu znamy starą cenę (120 zł) i nową cenę (96 zł). Nie wiemy, o ile procent cena została obniżona. Jest to sytuacja, w której trzeba odpowiedzieć na pytanie, o ile procent jedna cena jest mniejsza od drugiej.

STARA CENA

120 zł	– 24 złote	96 zł
100%	– x% z 120 zł	

NOWA CENA

Wykonujemy obliczenia układając wcześniej proporcję:

120 ———— 100%
24 ———— x%

$$x = \frac{24 \cdot 100\,\%}{120} = 20\,\%$$

Odpowiedź: Cena spodni obniżona została o 20%.

---

9. Obliczenia bankowe.

Zadania dotyczące operacji bankowych rozwiązujemy w oparciu o metodę dotyczącą powiększania (zmniejszania) liczby o procent, poszukiwania liczby, znając jej wartość po zwiększeniu (zmniejszeniu) o procent lub obliczania, o ile procent jedna liczba jest większa (mniejsza) od drugiej.

Pojęcia związane z operacjami bankowymi:

– **lokata** – wpłata pieniędzy do banku na określony czas. Po upłynięciu tego czasu bank dolicza do wpłaconej kwoty odsetki, których wysokość określa się jako procent od wpłaconej kwoty. Na przykład: można wpłacić kwotę 2000 złotych do banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi 5% w stosunku rocznym. Oznacza to, że bank po roku czasu dołoży do konta klienta 5% z kwoty 2000 złotych, czyli 100 złotych. Klient będzie miał na koncie po roku czasu 2100 złotych.
– **kredyt** – oprocentowana pożyczka pieniędzy z banku. Bank pożycza klientowi pewną sumę pieniędzy na określony czas, a klient ma obowiązek zwrócić tą kwotę wraz z odsetkami, czyli dodatkowymi pieniędzmi, których ilość określa się jako procent od pożyczonej kwoty. Na przykład: można wziąć kredyt w wysokości 2000 złotych z banku, w którym oprocentowanie kredytów wynosi 20% w stosunku rocznym. Oznacza to, że trzeba będzie po roku czasu zwrócić do banku pożyczoną kwotę powiększoną o 20% z kwoty 2000 złotych, czyli 400 złotych. Klient będzie musiał zwrócić 2400 złotych. Najczęściej spłatę kredytu rozkłada się na raty (np. miesięczne).
– **konto** – bankowe „miejsce" umieszczania pieniędzy. Oznaczone wielocyfrowym numerem służy do „składowania" na nim pieniędzy lub wykonywania operacji finansowych.
– **oprocentowanie lokat** – w przypadku umieszczenia pieniędzy na lokacie bankowej, bank po pewnym (ustalonym) okresie czasu dodaje na konto klienta pewną kwotę pieniędzy, której wysokość jest określana jako procent od wpłaconej kwoty. Ten procent wraz z określeniem czasu (skali) nazywamy oprocentowaniem lokat. Na przykład: bank może oferować oprocentowanie lokat w wysokości 5% w skali roku.
– **oprocentowanie kredytu** – w przypadku pożyczenia pieniędzy z banku w postaci kredytu, trzeba po pewnym (ustalonym) okresie czasu oddać bankowi pieniądze wraz z dodatkową kwotą, której wysokość jest określana jako procent od pożyczonej kwoty. Ten procent wraz z określeniem czasu kredytu (skali) nazywamy oprocentowaniem kredytów. Na przykład: bank może oferować oprocentowanie kredytów w wysokości 20% w skali roku.
– **odsetki** – zarówno gdy składamy pieniądze na lokacie, czy pożyczamy pieniądze z banku w postaci kredytu, kwota pieniędzy zostaje powiększona o pewien procent. Te dodatkowe pieniądze na lokacie lub doliczone do kredytu nazywamy odsetkami.
– **kapitalizacja odsetek** – operacja bankowa polegająca na doliczeniu dodatkowej kwoty pieniędzy (odsetek) do kapitału zgromadzonego na lokacie lub naliczenie dodatkowej kwoty pieniędzy (odsetek) do kredytu, który klient spłaca bankowi.
– **kapitał początkowy** – kwota pieniędzy jaką klient wpłaca do banku na lokatę.
– **rata** – część kwoty pieniędzy, jaką trzeba zwrócić bankowi po zaciągnięciu kredytu. Bank rozkłada spłatę kredytu na raty (przeważnie spłacane co miesiąc).
– **kapitał końcowy** – kwota pieniędzy jaką klient ma na lokacie bankowej po kapitalizacji odsetek.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Oprocentowanie lokat w pewnym banku wynosi 4% w skali roku. Oblicz, ile pieniędzy będziesz mieć na koncie po roku czasu, a ile po dwóch latach oszczędzania, jeśli wpłacisz do banku kwotę 5000 złotych?"*

Kapitał początkowy: 5000 złotych.
Oprocentowanie lokat: 4% w skali roku.

Obliczamy odsetki po upływie roku czasu:

$$4\% \cdot 5000 = \frac{4}{100} \cdot 5000 = 200$$

Po roku czasu bank doliczy do kwoty 5000 złotych odsetki w wysokości 200 złotych. Na koncie będzie:

5000 + 200 = 5200 złotych.

Obliczamy odsetki po upływie dwóch lat:

$$4\% \cdot 5200 = \frac{4}{100} \cdot 5200 = 208$$

Po dwóch latach bank doliczy do kwoty 5200 złotych odsetki w wysokości 208 złotych. Na koncie będzie:

5200 + 208 = 5408 złotych.

Odpowiedź: Po roku czasu będzie na koncie 5200 złotych, a po upływie dwóch lat będzie na koncie 5408 złotych.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Zaciągając kredyt w wysokości 6000 złotych pożyczkobiorca będzie musiał spłacić 7500 złotych. Oblicz, ile wynosi oprocentowanie tego kredytu?”*

Kapitał początkowy: 6000 złotych.
Kapitał końcowy: 7500 złotych
Oprocentowanie lokat w skali roku: x

Obliczamy odsetki po upływie roku czasu:

7500 – 6000 = 1500 złotych

Po roku czasu bank doliczy do kwoty 6000 złotych odsetki w wysokości 1500 złotych. Trzeba obliczyć, jaki to procent wpłaconej kwoty? Należy posłużyć się odpowiednią proporcją:

$$\begin{array}{ccc} 6000 & \text{———} & 100\% \\ 1500 & \text{———} & x\% \end{array}$$

Obliczamy oprocentowanie:

$$x = \frac{1500 \cdot 100\%}{6000} = 25\%$$

Odpowiedź: Oprocentowanie kredytu wynosi 25%.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Oprocentowanie lokat w pewnym banku wynosi 5% w skali roku. Ile pieniędzy należy wpłacić na konto, aby po roku mieć na nim 4200 złotych?”*

Kapitał początkowy: x złotych.
Kapitał końcowy: 4200 złotych
Oprocentowanie lokat w skali roku: 5%

Jeśli kapitał początkowy to 100% wpłaconych pieniędzy, to kwota po doliczeniu odsetek stanowić będzie 105% kapitału początkowego (100% + 5% = 105%). Należy posłużyć się odpowiednią proporcją:

$$\begin{array}{ccc} x & \text{———} & 100\% \\ 4200 & \text{———} & 105\% \end{array}$$

Obliczamy kapitał początkowy:

$$x = \frac{4200 \cdot 100\%}{105\%} = 4000$$

Odpowiedź: Na konto trzeba wpłacić 4000 złotych.

Stężenia procentowe roztworów.

Roztworem nazywamy mieszaninę jednorodną dwóch składników chemicznych, z których jeden jest rozpuszczalnikiem (na przykład wodą). Roztworem jest np.:

- sól kuchenna rozpuszczona w wodzie (roztwór soli, czyli solanka),
- ocet spożywczy (roztwór octu zmieszanego z wodą),
- posłodzona herbata (roztwór cukru i herbaty zmieszanych z wodą)
- roztwory innych związków chemicznych (np. kwasów),
- alkohol sprzedawany w sklepie (roztwór spirytusu i wody),
- itd…

Stężenie procentowe roztworu, to informacja zaprezentowana w postaci procentu, która mówi nam jaką częścią roztworu jest substancja w nim rozpuszczona.

Na przykład:

- W roztworze soli o stężeniu 8%, znajduje się sól, która stanowi 8% wagi całego roztworu, a resztę (92% wagi) stanowi woda.
- W roztworze kwasu solnego o stężeniu 3%, znajduje się czysty kwas solny, który stanowi 3% wagi całego roztworu, a resztę (97% wagi) stanowi woda.
- Ocet spożywczy ma stężenie 5%. Oznacza to, że w roztworze znajduje się kwas octowy, który stanowi 5% wagi całego roztworu, a resztę (95% wagi) stanowi woda.

UWAGA! Stężenie procentowe **nic nie mówi** o ilości rozpuszczonej substancji! Nie można na podstawie informacji o stężeniu procentowym roztworu wnioskować na temat objętości, wagi czy ciężaru substancji rozpuszczonej, ani całego roztworu. Nie można stwierdzić na przykład, że w roztworze soli o stężeniu 8% znajduje się 8 gramów soli! Takie informacje należy uzyskać na podstawie odpowiednich obliczeń.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Ile soli znajduje się w 150 gramach roztworu o stężeniu 8%?"*

Stężenie procentowe roztworu wynosi 8%, to znaczy że 8% wagi roztworu stanowi sól. Należy obliczyć 8% z wagi całego roztworu, czyli 150 gram:

$$8\% \cdot 150 = \frac{8}{100} \cdot 150 = 12$$

Odpowiedź: W roztworze znajduje się 12 gram soli.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Zmieszano ze sobą 10 gram kwasu azotowego i 240 gram wody. jakie stężenie ma otrzymany roztwór?"*

Stężenie procentowe roztworu obliczymy, gdy odpowiemy na pytanie, jaką częścią całego roztworu jest rozpuszczony tam kwas azotowy. Najpierw trzeba obliczyć ilość całego roztworu:

10 g + 240 g = 250 g

Teraz należy ułożyć odpowiednią proporcję i rozwiązać ją:

$$\begin{array}{ccc} 250 & \text{———} & 100\% \\ 10 & \text{———} & x\% \end{array}$$

$$x = \frac{10 \cdot 100\%}{250} = 4\%$$

Odpowiedź: Roztwór ma stężenie 4%.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Ile roztworu o stężeniu 6% można uzyskać mieszając 30 gramów cukru z wodą?"*

Stężenie procentowe roztworu wynosi 6%. Wiemy, że 6% masy roztworu stanowi cukier, którego w roztworze znajduje się 30 gramów. Musimy obliczyć masę całego roztworu. Należy ułożyć i rozwiązać odpowiednią proporcję:

$$\begin{array}{ccc} x & \text{———} & 100\% \\ 30 & \text{———} & 6\% \end{array}$$

$$x = \frac{30 \cdot 100\%}{6\%} = 500$$

Odpowiedź: Z 30 g cukru można uzyskać 500 g roztworu o stężeniu 6%.

Diagramy procentowe.

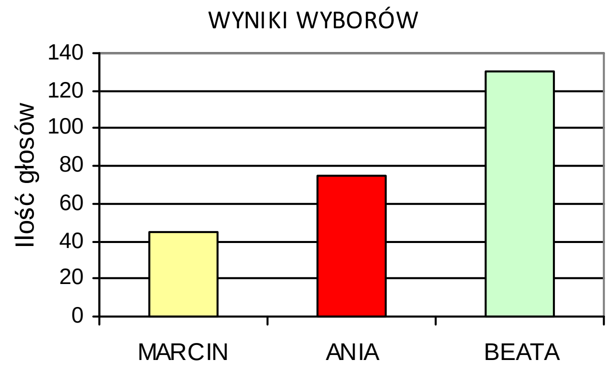
Informacje i dane statystyczne dotyczące pojęcia procentu można prezentować za pomocą diagramów. Najczęściej stosowane diagramy procentowe, to:

- procentowy diagram słupkowy,
- procentowy diagram kołowy,
- procentowy diagram paskowy (prostokątny).

Rodzaje i rolę diagramów przedstawia przykład:

„W wyborach do samorządu szkolnego wzięło udział trzech kandydatów. Marcin otrzymał 45 głosów, Ania 75 głosów, a Beata 130 głosów. Narysuj diagram procentowy prezentujący wyniki wyborów.”

Wyniki ilościowe można zaprezentować tylko za pomocą ilościowego diagramu słupkowego. Pomoże on skonstruować diagramy procentowe. Oto ilościowy diagram słupkowy przedstawiający wyniki wyborów:



Przeliczamy informacje tak, aby otrzymać dane procentowe. Najpierw obliczamy ilość wszystkich oddanych głosów:

45 + 75 + 130 = 250 głosów

Tworząc odpowiednie proporcje sprawdzamy jaki procent głosów otrzymał Marcin, jaki procent głosów otrzymała Ania i jaki procent głosów otrzymała Beata?

Marcin:

$$\begin{array}{lcl} 250 & \text{———} & 100\% \\ 45 & \text{———} & x\% \end{array} \qquad x = \frac{45 \cdot 100\%}{250} = 18\%$$

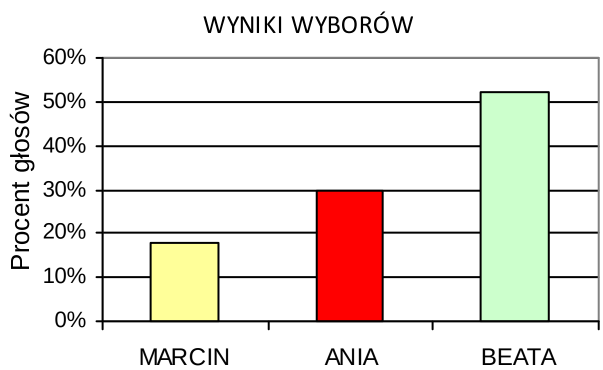
Ania:

$$\begin{array}{lcl} 250 & \text{———} & 100\% \\ 75 & \text{———} & x\% \end{array} \qquad x = \frac{75 \cdot 100\%}{250} = 30\%$$

Beata:

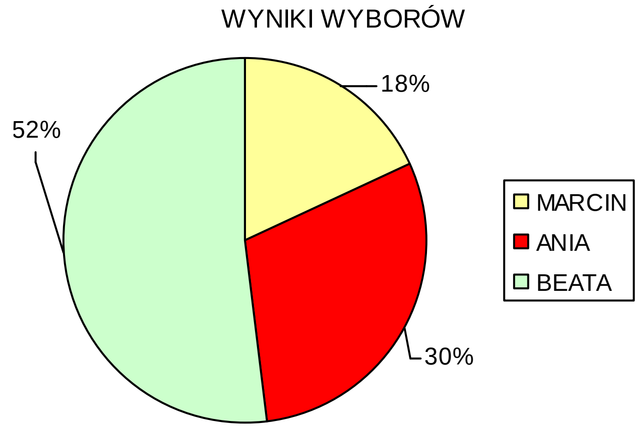
$$\begin{array}{lcl} 250 & \text{———} & 100\% \\ 130 & \text{———} & x\% \end{array} \qquad x = \frac{130 \cdot 100\%}{250} = 52\%$$

Przenoszę dane procentowe na diagram słupkowy:

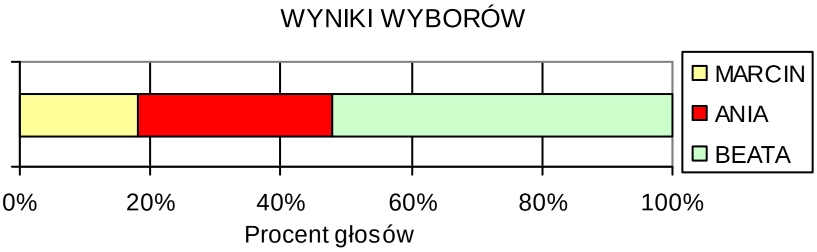


Słupkowy diagram procentowy jest proporcjonalny do ilościowego diagramu słupkowego.

Przenoszę dane procentowe na diagram kołowy:

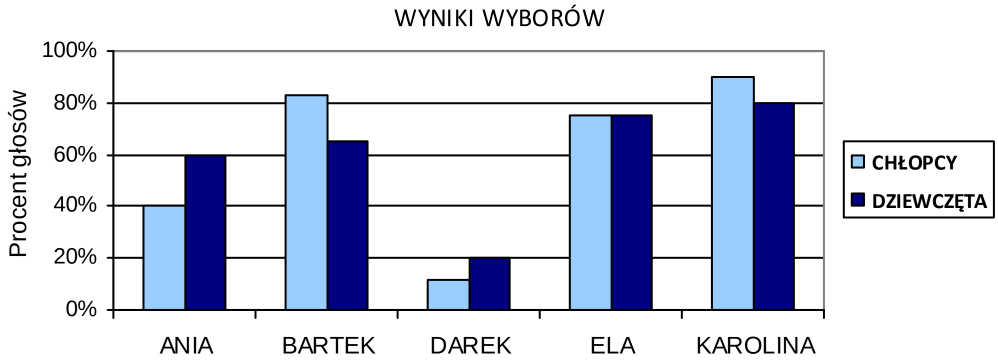


Przenoszę dane procentowe na diagram paskowy (prostokątny):



Wszystkie diagramy prezentują te same informacje procentowe.

Uwagi na temat diagramu słupkowego. Diagram słupkowy ma pewną przewagę nad innymi diagramami. Można za jego pomocą prezentować kilka grup danych procentowych (na przykład dane statystyczne można podawać osobno dla kobiet i mężczyzn). Można prezentować dane niepełne (których suma nie jest równa 100%) oraz dane pokrywające się (gdy suma może wykraczać powyżej 100%). Taką sytuację prezentuje przykład, gdzie zaprezentowane są wyniki wyborów, w których głosowało 200 chłopców i 300 dziewcząt, a każdy mógł oddać głos na trzech kandydatów spośród pięciu (kandydaci to: Ania, Bartek, Darek, Ela, Karolina).



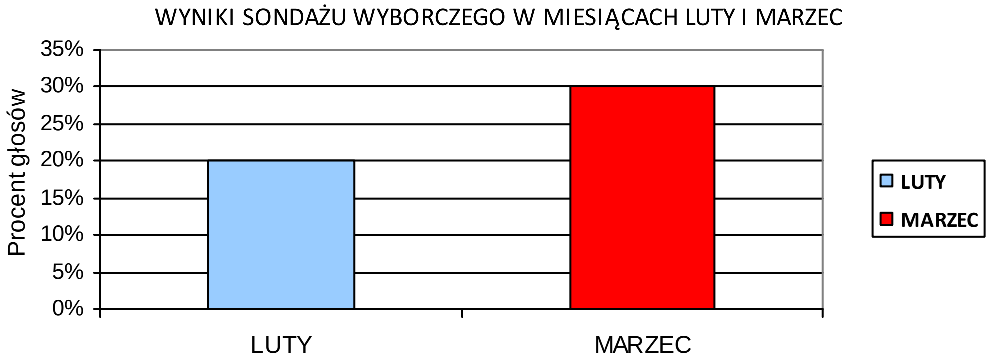
10. Punkty procentowe.

Punkty procentowe. Odczytując **różnicę między danymi procentowymi** otrzymujemy wynik w postaci punktów procentowych, a nie w postaci procentu. Każdą **zmianę danych procentowych** podajemy w postaci punktów procentowych.

Przykłady:
- Bank zmienił oprocentowanie lokat. Dawniej wynosiło ono 6% a obecnie wynosi 7%. Oprocentowanie lokat zwiększyło się o 1 punkt procentowy (1 p. p.). Nie wolno użyć błędnego sformułowania: „Oprocentowanie lokat zwiększyło się o 1 procent"!
- W pewnym zakładzie pracy kobiety stanowiły w 2000 roku 30% załogi. Obecnie zatrudnienie kobiet wzrosło do 45% wszystkich pracowników. Zatrudnienie kobiet zwiększyło się o 15 punktów procentowych (15 p. p.). Nie wolno użyć błędnego sformułowania: „Zatrudnienie kobiet zwiększyło się o 15 procent"!
- W planach rządowych jest zmniejszenie stawki podatku VAT z 22% do 19%. Oznacza to, że rząd planuje obniżkę podatku o 3 punkty procentowe. Nie wolno użyć błędnego sformułowania: „Rząd planuje obniżkę podatku o 3 procent"!

Rozbieżność pomiędzy pojęciem punktu procentowego, a informacją dotyczącą różnicy w podawanej procentach przedstawia przykład:

Diagram przedstawia wyniki sondażu wyborczego prezentującego poparcie dla kandydata w wyborach do parlamentu Adama Nowaka w miesiącach luty i marzec. Sondaż przeprowadzono w grupie 1000 osób:



Z diagramu wynika, że poparcie zwiększyło się z 20% do 30%, czyli poparcie wzrosło o 10 punktów procentowych. Ale analizując dane ilościowe można stwierdzić, że poparcie wzrosło o 50%, gdyż w porównaniu z miesiącem lutym, w marcu na Nowaka chce głosować o połowę więcej wyborców. Można dokonać szybkiej analizy:

W lutym spośród 1000 osób objętych sondażem 20% chciało głosować na Nowaka. 20% z tysiąca osób to 200 wyborców.
W marcu spośród 1000 osób objętych sondażem 30% chciało głosować na Nowaka. 30% z tysiąca osób to 300 wyborców.
Czyli w marcu na Adama Nowaka chce głosować o 100 osób więcej niż w lutym, gdzie poparcie dla tego kandydata zgłaszało 200 osób. 100 to połowa z 200, więc można stwierdzić, że w marcu na Nowaka chce głosować o połowę więcej wyborców. Poparcie wzrosło o 50%.

Ostatecznie: Poparcie dla Adama Nowaka wzrosło o 10 punktów procentowych i zarazem poparcie dla Adama Nowaka wzrosło o 50%.

---

11. Obliczenia z zastosowaniem promila.

Wszystkie obliczenia związane z pojęciem promila wykonuje się w identyczny sposób jak w przypadku procentów, z tą różnicą, że promil to tysięczna część całości i w obliczeniach w miejsce liczby 100% należy stosować 1000‰.

Przykład: Oblicz 2‰ liczby 1500.

Obliczamy 2‰ z liczby 1500 za pomocą działania mnożenia:

$$2‰ \cdot 1500 = \frac{2}{1000} \cdot 1500 = 3$$

Odpowiedź: 2‰ liczby 1500 wynosi 3.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„Stężenie roztworu kwasu solnego wynosi 5‰. Oblicz, ile kwasu solnego znajduje się w 200 gramach tego roztworu?”*

Obliczamy 5‰ z liczby 200 za pomocą działania mnożenia:

$$5‰ \cdot 200 = \frac{5}{1000} \cdot 200 = 1$$

Odpowiedź: W roztworze znajduje się 1 gram kwasu.

Przykład: Rozwiąż zadanie tekstowe: *„W miejscowości Nowy Sad mieszka 4000 mieszkańców co stanowi 4‰ mieszkańców całego województwa. Oblicz ilu mieszkańców liczy województwo?”*

Tworzymy odpowiednią proporcję:

$$\begin{array}{ccc} x & \text{———} & 1000‰ \\ 4000 & \text{———} & 4‰ \end{array}$$

Rozwiązujemy proporcję:

$$x = \frac{4000 \cdot 1000}{4} = 1000000$$

Odpowiedź: Województwo liczy milion mieszkańców.

---

12. Pojęcie prawdopodobieństwa.

Sytuacją losową (doświadczeniem losowym) nazywamy taką sytuację z życia codziennego, o której wyniku decyduje los, lub gdy wynik tej sytuacji jest dla nas całkowicie przypadkowy.

Sytuacjami losowymi są np.:
- rzut monetą,
- rzut kostką (lub rzut kilkoma kostkami),
- rzut kilkoma monetami,
- wylosowanie czterech kart z tali,
- zakup losu (lub kilku losów) na loterii,
- losowy wybór trzyosobowej delegacji spośród 10 osób,
- wysiadanie ludzi na kolejnych piętrach z windy, gdy nie znamy adresu zamieszkania tych osób,
- wynik wyścigu maratońskiego, gdy nie znamy możliwości poszczególnych zawodników,
- itd…

Zdarzeniem losowym nazywamy wynik sytuacji losowej, czyli pewną sytuację, która zaistniała, a zadecydował o tym los.

Zdarzeniami losowymi są np.:
- w rzucie monetą wypadła reszka,
- w rzucie kostką wypadła liczba 5,
- w rzucie kostką wypadła parzysta liczba oczek,
- podczas rzutu dwoma kostkami wypadła liczba oczek, których suma wynosi 9,
- wśród czterech wylosowanych kart są dwa asy,
- w losowo wybranej, trzyosobowej delegacji jest co najmniej jedna kobieta,
- podczas jazdy windą wszyscy pasażerowie wysiedli na różnych piętrach,
- itd…

Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego to liczba, która opisuje szanse na uzyskanie danego zdarzenia losowego. Prawdopodobieństwo jest liczbą podawaną zazwyczaj w postaci ułamka zwykłego lub dziesiętnego, przy czym liczba ta nie jest ujemna i nie jest większa niż jeden.
Prawdopodobieństwo zdarzenia można obliczyć porównując liczbę zdarzeń sprzyjających (czyli tych których prawdopodobieństwo chcemy obliczyć) do liczby wszystkich zdarzeń.

Przykład: Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając monetą wypadnie reszka?

Rzut monetą jest sytuacją losową, bo o wyniku rzutu monetą decyduje los. W rzucie monetą możliwe są tylko dwa zdarzenia losowe: pierwsze to zdarzenie, kiedy wypadnie reszka, drugie to zdarzenie, gdy wypadnie orzeł. Tak więc prawdopodobieństwo, że wypadnie reszka to jedna szansa na dwa możliwe zdarzenia. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia otrzymamy dzieląc 1 przez 2:

$$P = \frac{1}{2}$$

Przykład: Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając kostką wypadnie parzysta liczba oczek?

Rzut kostką jest sytuacją losową, bo o wyniku rzutu kostką decyduje los. W rzucie kostką możliwe jest sześć zdarzeń: wypadnie 1 oczko, wypadną 2 oczka, wypadną 3 oczka, wypadną 4 oczka, wypadnie 5 oczek i wypadnie 6 oczek. Spośród tych sześciu zdarzeń interesują nas trzy: wypadną 2 oczka, wypadną 4 oczka i wypadnie 6 oczek, bo wszystkie te zdarzenia dotyczą parzystej liczby oczek. Tak więc prawdopodobieństwo, że wypadnie parzysta liczba oczek, to trzy szanse na sześć możliwych. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia otrzymamy dzieląc 3 przez 6:

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Przykład: Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tali kart wylosujemy króla?

Losowanie karty z tali jest sytuacją losową, bo o wyniku decyduje los. W tali są 52 karty i każda z nich może zostać wylosowana. Możliwe są więc pięćdziesiąt dwa zdarzenia. Ponieważ w tali są cztery króle, to znaczy, że w naszym zdarzeniu interesują nas cztery możliwości (król pik, król kier, król karo i król trefl). Tak więc prawdopodobieństwo, że wylosujemy króla to cztery szanse na pięćdziesiąt dwie możliwości. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia otrzymamy dzieląc 4 przez 52:

$$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Przykład: Na loterii znajduje się 50 losów, wśród których 10 jest wygrywających. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupimy los wygrywający?

Zakup losu na loterii jest sytuacją losową, bo o wyniku decyduje los. W sprzedaży jest 50 losów i każdy z nich może zostać wybrany i kupiony. Możliwe jest więc pięćdziesiąt zdarzeń. Ponieważ wśród losów jest 10 wygrywających, to znaczy, że w naszym zdarzeniu interesuje nas dziesięć możliwości (każdy z dziesięciu losów wygrywających). Tak więc prawdopodobieństwo, że trafimy na los wygrywający to dziesięć szans na pięćdziesiąt możliwych. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia otrzymamy dzieląc 10 przez 50:

$$P = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Zdarzenie niemożliwe. Zdarzeniem niemożliwym jest takie zdarzenie, którego prawdopodobieństwo wynosi zero. Na przykład prawdopodobieństwo, że w rzucie kostką wypadnie liczba oczek równa siedem, albo, że z tali kart wylosujemy równocześnie pięć asów.

Zdarzenie pewne. Zdarzeniem pewnym jest takie zdarzenie, którego prawdopodobieństwo wynosi jeden. Na przykład prawdopodobieństwo, że w rzucie kostką wypadnie liczba oczek mniejsza niż 7, albo, że z tali kart wylosujemy kartę czarną lub czerwoną.

Opracował: Paweł Góralczyk

Gimnazjum Społeczne im. Lady Sue Ryder w Woli Batorskiej