ARYTMETYKA LICZB RZECZYWISTYCH

Treść:

- zagadnienie elementarne

- zagadnienie wykraczające poza program

ARYTMETYKA LICZB RZECZYWISTYCH

1. **Tabliczka mnożenia:**

1 · 1 = 1	**2 · 1 = 2**	**3 · 1 = 3**	**4 · 1 = 4**	**5 · 1 = 5**	**6 · 1 = 6**	**7 · 1 = 7**	**8 · 1 = 8**	**9 · 1 = 9**	**10 · 1 = 10**
1 · 2 = 2	**2 · 2 = 4**	**3 · 2 = 6**	**4 · 2 = 8**	**5 · 2 = 10**	**6 · 2 = 12**	**7 · 2 = 14**	**8 · 2 = 16**	**9 · 2 = 18**	**10 · 2 = 20**
1 · 3 = 3	**2 · 3 = 6**	**3 · 3 = 9**	**4 · 3 = 12**	**5 · 3 = 15**	**6 · 3 = 18**	**7 · 3 = 21**	**8 · 3 = 24**	**9 · 3 = 27**	**10 · 3 = 30**
1 · 4 = 4	**2 · 4 = 8**	**3 · 4 = 12**	**4 · 4 = 16**	**5 · 4 = 20**	**6 · 4 = 24**	**7 · 4 = 28**	**8 · 4 = 32**	**9 · 4 = 36**	**10 · 4 = 40**
1 · 5 = 5	**2 · 5 = 10**	**3 · 5 = 15**	**4 · 5 = 20**	**5 · 5 = 25**	**6 · 5 = 30**	**7 · 5 = 35**	**8 · 5 = 40**	**9 · 5 = 45**	**10 · 5 = 50**
1 · 6 = 6	**2 · 6 = 12**	**3 · 6 = 18**	**4 · 6 = 24**	**5 · 6 = 30**	**6 · 6 = 36**	**7 · 6 = 42**	**8 · 6 = 48**	**9 · 6 = 54**	**10 · 6 = 60**
1 · 7 = 7	**2 · 7 = 14**	**3 · 7 = 21**	**4 · 7 = 28**	**5 · 7 = 35**	**6 · 7 = 42**	**7 · 7 = 49**	**8 · 7 = 56**	**9 · 7 = 63**	**10 · 7 = 70**
1 · 8 = 8	**2 · 8 = 16**	**3 · 8 = 24**	**4 · 8 = 32**	**5 · 8 = 40**	**6 · 8 = 48**	**7 · 8 = 56**	**8 · 8 = 64**	**9 · 8 = 72**	**10 · 8 = 80**
1 · 9 = 9	**2 · 9 = 18**	**3 · 9 = 27**	**4 · 9 = 36**	**5 · 9 = 45**	**6 · 9 = 54**	**7 · 9 = 63**	**8 · 9 = 72**	**9 · 9 = 81**	**10 · 9 = 90**
1 · 10 = 10	**2 · 10 = 20**	**3 · 10 = 30**	**4 · 10 = 40**	**5 · 10 = 50**	**6 · 10 = 60**	**7 · 10 = 70**	**8 · 10 = 80**	**9 · 10 = 90**	**10 · 10 = 100**

2. **Nazwy działań i ich elementów:**

DODAWANIE – **SUMA**

$$6 + 7 = 13$$

składnik składnik suma

ODEJMOWANIE – **RÓŻNICA**

$$9 - 5 = 4$$

odjemna odjemnik różnica

MNOŻENIE – **ILOCZYN**

$$6 \cdot 3 = 18$$

czynnik czynnik iloczyn

DZIELENIE – **ILORAZ**

$$21 : 7 = 3$$

dzielna dzielnik iloraz

POTĘGOWANIE

$$4^3 = 64$$

podstawa wykładnik (*stopień*)

PIERWIASTEK

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

stopień liczba podpierwiastkowa

UWAGA!
Liczba **o 3 większa od x** – to inaczej **x + 3**
Liczba **o 3 mniejsza od x** – to inaczej **x – 3**
Kwadrat liczby x – to inaczej x^2

Liczba **3 razy mniejsza od x** – to inaczej **x : 3**
Liczba **3 razy większa od x** – to inaczej **3 · x**
Sześcian liczby x – to inaczej x^3

Iloraz (dzielenie) dwóch liczb można zapisać również **za pomocą kreski ułamkowej**,
czyli zamiast działania **8 : 3** można zapisać: $\frac{8}{3}$

Niewykonalne jest działanie **dzielenia przez zero**. 15 : 0 – takie działanie nie ma wyniku, nie można go wykonać.
Można liczbę zero podzielić przez dowolna liczbę. Wynik zawsze będzie równy zero. Np.: 0 : 4 = 0, 0 : 10 = 0 itd.
Wynik mnożenia liczby przez zero wynosi zawsze zero. Na przykład 8 · 0 = 0, 237 · 0 = 0, – 19 · 0 = 0 itd.

3. **Zbiory liczbowe:**

Zbiór liczb naturalnych N, to zbiór, do którego należą liczby {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …, 34,…, 789, …, 8000, …, 1000000,…}. Jest to zbiór nieskończony (liczb jest nieskończenie wiele). Czasem liczba 0 jest uznawana za liczbę naturalną.
Zbiór liczb całkowitych C, to zbiór, do którego należą liczby {…, -1250,…, -36,…, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 67, …, 100,…, 47000, …, 6720098100,…}. Jest to zbiór nieskończony (liczb jest nieskończenie wiele). Do zbioru liczb całkowitych należą wszystkie liczby naturalne oraz przeciwne do nich liczby ujemne oraz liczba 0.
Zbiór liczb wymiernych W, to zbiór wszystkich liczb, które można zapisać w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$, (*p* to liczba całkowita, *q* to liczba naturalna). Liczby wymierne to na przykład $8,\ 23,\ -7,\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ -1\frac{2}{7},\ 7{,}2,\ 12\frac{1}{6}$. Jest to zbiór nieskończony (liczb jest nieskończenie wiele). Do zbioru liczb całkowitych należą wszystkie liczby naturalne oraz wszystkie liczby całkowite.
Zbiór liczb niewymiernych NW, to zbiór wszystkich liczb, których nie można zapisać w postaci ułamka zwykłego. Wartości tych liczb można podać tylko w przybliżeniu, więc często prezentuje się je za pomocą działania (np. $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{10}$), lub ukrywa się je pod symbolami literowymi (np. π, e). Jest to zbiór nieskończony (liczb jest nieskończenie wiele).
Zbiór liczb rzeczywistych R, to po prostu zbiór wszystkich liczb. Należą do niego zarówno liczby wymierne jak i niewymierne, całkowite i naturalne.

Inne ważne zbiory liczbowe

Liczby pierwsze, to takie liczby naturalne, które można podzielić (bez reszty) tylko przez liczbę 1 oraz przez samą siebie (liczba 1 nie jest uznawana za liczbę pierwszą). Liczba pierwszą jest na przykład liczba 13. Można ją podzielić przez 1 (bo każdą liczbę można podzielić przez 1). 13 : 1 = 13. Można ją podzielić przez samą siebie (bo każdą liczbę można podzielić przez samą siebie). 13 : 13 = 1. Ale już więcej nie ma takich liczb, przez które można podzielić liczbę 13 (nie dzieli się przez 2 ani przez 3, ani przez 4 itd.) Z tego wynika, że liczba 13 jest liczbą pierwszą. Inne liczby pierwsze, to 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 … itd. Liczby naturalne, które nie są pierwsze nazywamy **złożonymi** (oprócz liczb 0 i 1)

---

4. **Kolejność wykonywania działań**. Podczas obliczania wyrażenia arytmetycznego złożonego z kilku działań należy zachować odpowiednią kolejność:
   a) potęgowanie i pierwiastkowanie
   b) mnożenie i dzielenie
   c) dodawanie i odejmowanie

Jeśli w wyrażeniu znajdują się działania w nawiasach należy je wykonać jako pierwsze!

---

5. **Podstawowe działania z udziałem liczb dodatnich i ujemnych.**

Działanie dodawania i odejmowania z udziałem liczb dodatnich i ujemnych opisują przykłady:

$5+8=13$

Suma dwóch liczb dodatnich (sytuacja oczywista).

$17-9=8$

Różnica liczb dodatnich (sytuacja oczywista)

$6-14=-8$

Różnica liczb dodatnich – sytuacja, gdy pierwsza liczba (odjemna) ma mniejszą wartość niż druga (odjemnik). Wówczas wynik działania będzie miał znak ujemny, a wartość bezwzględną wyniku otrzymujemy odejmując od większej liczby liczbę mniejszą (14 – 6 = 8, wynik zapisujemy ze znakiem „minus”).

$-5+11=6$

Suma liczby ujemnej i liczby dodatniej – sytuacja, gdy liczba ujemna ma mniejszą wartość bezwzględną od liczby dodatniej. Wówczas wynik działania będzie miał znak dodatni, a wartość bezwzględną wyniku otrzymujemy odejmując od większej wartości liczby, wartość mniejszą (11 – 5 = 6).

$-13+4=-9$

Suma liczby ujemnej i liczby dodatniej – sytuacja, gdy liczba ujemna ma większą wartość bezwzględną od liczby dodatniej. Wówczas wynik działania będzie miał znak ujemny, a wartość bezwzględną wyniku otrzymujemy odejmując od większej wartości liczby wartość mniejszą (13 – 4 = 9, wynik zapisujemy ze znakiem „minus”).

$-8-12=-20$

Różnica liczby ujemnej i liczby dodatniej. Wówczas wynik działania będzie miał znak ujemny, a wartość bezwzględną wyniku otrzymujemy dodając wartości liczb (8 +12 = 20, wynik zapisujemy ze znakiem „minus”).

$16+(-7)=16-7=9$ $-3+(-5)=-3-5=-8$ $2+(-10)=2-10=-8$

Dodawanie liczby ujemnej zamieniamy na odejmowanie liczby dodatniej („plus” i „minus” zamieniamy na „minus”) i wykonujemy działanie jak we wcześniejszych przykładach.

$6-(-7)=6+7=13$ $-8-(-5)=-8+5=-3$ $-4-(-11)=-4+11=7$

Odejmowanie liczby ujemnej zamieniamy na dodawanie liczby dodatniej (dwa „minusy” zamieniamy na „plus”) i wykonujemy działanie jak we wcześniejszych przykładach.

Działanie mnożenia i dzielenia z udziałem liczb dodatnich i ujemnych opisują przykłady:

$\boxed{3 \cdot 8 = 24}$

Iloczyn dwóch liczb dodatnich (sytuacja oczywista).

$\boxed{-5 \cdot (-6) = 30}$

Iloczyn dwóch liczb ujemnych – wynik ma znak dodatni („dwa minusy dają plus”).

$\boxed{9 \cdot (-3) = -27}$ lub $\boxed{-7 \cdot 8 = -56}$

Iloczyn liczby ujemnej i dodatniej (lub dodatniej i ujemnej) – wynik ma znak ujemny („minus i plus dają minus”).

$\boxed{15 : 3 = 5}$ lub $\boxed{\frac{15}{3} = 5}$

Iloraz dwóch liczb dodatnich (sytuacja oczywista).

$\boxed{-28 : (-4) = 7}$ lub $\boxed{\frac{-28}{-4} = 7}$

Iloraz dwóch liczb ujemnych – wynik ma znak dodatni („dwa minusy dają plus”).

$\boxed{32 : (-8) = -4}$ lub $\boxed{\frac{-54}{6} = -9}$

Iloraz liczby ujemnej i dodatniej (lub dodatniej i ujemnej) – wynik ma znak ujemny („minus i plus dają minus”).

UWAGA! W przypadku większej ilości czynników postępujemy według zasady:
Jeśli w działaniu (mnożenia lub dzielenia) występuje parzysta ilość znaków „minus”, to wynik działania jest dodatni.
Jeśli w działaniu (mnożenia lub dzielenia) występuje nieparzysta ilość znaków „minus”, to wynik działania jest ujemny.
Na przykład:

$\boxed{-2 \cdot (-3) \cdot (-5) = -30}$ - w działaniu występują trzy znaki „minus” (liczba nieparzysta), więc wynik jest ujemny.

$\boxed{-3 \cdot (-6) \cdot (-10) : (-15) = 12}$ - w działaniu występują cztery znaki „minus” (parzysta), więc wynik jest dodatni.

---

6. **Ułamek zwykły i dziesiętny.**

Ułamek zwykły:

$$\frac{3}{5}$$

licznik

kreska ułamkowa

mianownik

Ułamek zwykły $\frac{3}{5}$ można zilustrować w następujący sposób: całą figurę dzielimy na pięć równych części. Jeśli wybierzemy trzy części spośród pięciu, oznacza to, że wybraliśmy $\frac{3}{5}$ całej figury.

Zamiana postaci ułamka zwykłego:

– Skracanie ułamka. Należy licznik i mianownik podzielić przez tą samą liczbę. Na przykład:

$$\frac{\cancel{8}}{\cancel{36}} \overset{:4}{=} \frac{2}{9}$$

– Rozszerzanie ułamka. Należy licznik i mianownik pomnożyć przez tą samą liczbę. Na przykład:

$$\frac{3}{7} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{21}$$

– Wyłączanie całości (zamiana ułamka niewłaściwego do postaci liczby mieszanej). Dzielimy licznik przez mianownik. Reszta z dzielenia zostaje zapisana jako licznik ułamka.

$\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ bo gdy podzielimy 14 : 3 otrzymamy 4 całości i resztę 2 (reszta 2 to licznik ułamka, a mianownik pozostawiamy bez zmian).

$\frac{251}{8} = 31\frac{5}{8}$ bo gdy podzielimy 251 : 8 (dzielenie można wykonać pisemnie) otrzymamy 31 całości i resztę 5 (reszta 5 to licznik ułamka, a mianownik pozostawiamy bez zmian).

– Zamiana liczby mieszanej do postaci ułamka niewłaściwego. Aby wyliczyć wartość „nowego” licznika ułamka, mnożymy część całkowitą przez mianownik ułamka i dodajemy „stary” licznik. Na przykład:

$$7\frac{2}{5} = \frac{37}{5}$$

Ułamek dziesiętny:

Ułamek zwykły o mianowniku 10, 100, 1000, 10000 itd. można zapisać jako ułamek dziesiętny. Na przykład:

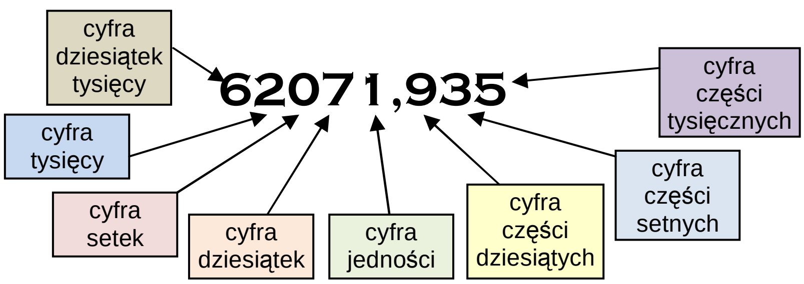
$\frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{53}{100} = 0{,}53$	$1\frac{9}{10} = 1{,}9$	$5\frac{287}{1000} = 5{,}287$	$\frac{7}{10000} = 0{,}0007$

Istnieją ułamki dziesiętne okresowe, czyli takie, w którym w części ułamkowej pewna sekwencja cyfr powtarza się „w kółko”. na przykład: 0,777777777… zapisujemy wówczas w uproszczeniu 0,(7); 0,6565656565… zapisujemy 0,(65).

Najbardziej znane ułamki dziesiętne okresowe:

$\frac{1}{3} = 0{,}3333333\ldots = 0(3)$	$\frac{2}{3} = 0{,}66666666\ldots = 0,(6)$	$\frac{1}{9} = 0{,}11111111\ldots = 0,(1)$

Nazwy cyfr w zapisie liczby w systemie dziesiętnym:



Liczbę w systemie dziesiętnym można zapisać za pomocą jej cyfr, jako następujące działanie:

$$\mathbf{75293 = 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0}$$

Zmiana ułamka zwykłego na dziesiętny:

Aby zamienić ułamek zwykły na dziesiętny można wybrać jeden ze sposobów:

- Rozszerzamy ułamek, tak, aby mianownikiem została liczba 10, 100, 1000, 10000… itd. Na przykład:

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=0{,}6 \qquad \frac{23}{25}=\frac{92}{100}=0{,}92 \qquad \frac{5}{8}=\frac{625}{1000}=0{,}625$$

- Pisemnie dzielimy licznik przez mianownik, tak, aby otrzymać wynik w postaci dziesiętnej. Jeśli zamieniamy liczbę zapisaną w postaci mieszanej (liczba całkowita i ułamek) można przed wykonaniem działania pisemnego zamienić liczbę do postaci niewłaściwej (patrz drugi przykład. Uwaga! W wyniku działania pisemnego możemy otrzymać dziesiętny ułamek okresowy. Na przykład:

$$\frac{13}{16}=13:16=0{,}8125 \qquad 3\frac{2}{11}=\frac{35}{11}=3{,}181818181\ldots=3,(18)$$

Zmiana ułamka dziesiętnego na zwykły:

Ułamek dziesiętny zapisujemy w postaci zwykłej i skracamy licznik z mianownikiem (jeśli jest to możliwe). Na przykład:

$$0{,}8=\frac{8}{10}=\frac{4}{5} \qquad 6{,}45=6\frac{45}{100}=6\frac{9}{20} \qquad 2{,}123=2\frac{123}{1000} \qquad 0{,}525=\frac{525}{1000}=\frac{21}{40}$$

Przybliżenia dziesiętne liczb – zaokrąglanie ułamka dziesiętnego.

Liczbę zapisaną w postaci dziesiętnej można zapisać w przybliżeniu. Dokonuje się tego przez pominięcie „niepotrzebnych" cyfr. Dokładność przybliżenia może być podana poprzez wskazanie tej cyfry, która ma pozostać jako ostatnia.

Na przykład:
Jeśli liczbę 5,7346 chcemy zapisać z dokładnością do części setnych (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku), należy „skasować" cyfry o mniejszym znaczeniu niż cyfra części setnych, czyli cyfry 4 i 6 (cyfra części tysięcznych i części dziesięciotysięcznych). Otrzymujemy więc:

cyfra części setnych — usuwana cyfra o największym znaczeniu

$$5{,}73\underline{46}\approx 5{,}73$$

cyfry do usunięcia

W powyższym przykładzie cyfrą o największym znaczeniu, którą „skasowaliśmy" była cyfra części tysięcznych, czyli 4. Jest to cyfra „niewielka", lecz może się zdarzyć, że usuwana cyfra może być „duża".

Na przykład:
Jeśli liczbę 18,29614 chcemy zapisać z dokładnością do części dziesiątych (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku), wówczas usuwaną cyfrą o największym znaczeniu będzie 9. Wówczas po usunięciu „niepotrzebnych" cyfr, należy ostatnią pozostawiona cyfrę powiększyć o 1. Taka sytuacja zachodzić będzie, gdy usuwaną cyfrą o największym znaczeniu będzie jedna z cyfr 5, 6, 7, 8 lub 9. W przypadku mniejszych cyfr przybliżenie wykonujemy tak jak w przykładzie pierwszym – tylko poprzez usunięcie cyfr.

cyfra części dziesiątych — usuwana cyfra o największym znaczeniu

$$18{,}2\underline{9614}\approx 18{,}3$$

cyfry do usunięcia — cyfra powiększona o 1

W przypadku, gdy dokładność przybliżenia dotyczy cyfr części całkowitej liczby, należy usuwane cyfry części całkowitej zastąpić zerami.

Na przykład: Gdy liczbę 6392692 należy zapisać z dokładnością do tysięcy, wykonujemy czynności:

cyfra tysięcy — usuwana cyfra o największym znaczeniu

$$6392\underline{693}\approx 6393000$$

zera zastępujące cyfry

cyfry do usunięcia — cyfra powiększona o 1

7. **Cyfry rzymskie.**

Do zapisu liczb za pomocą symboli rzymskich używamy siedmiu symboli. Nie można użyć obok siebie więcej niż trzech identycznych symboli. Nie można zapisać liczby 4 jako IIII; aby zapisać liczbę 4 należy użyć IV – czyli cyfra 5 pomniejszona o 1. Podobnie zapis XC oznacza działanie 100 – 10, czyli 90.

Podstawowe symbole:

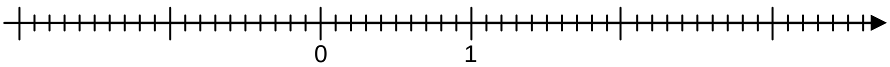
I	– 1
V	– 5
X	– 10
L	– 50
C	– 100
D	– 500
M	– 1000

Przykłady zapisu liczb

II – 2	XI – 11	LXXXVIII – 88
III – 3	XVI – 16	XC – 90
IV – 4	XX – 20	CXXXV – 135
VI – 6	XXX – 30	CCXXIV – 224
VII – 7	XL – 40	CD – 400
VIII – 8	XLVII – 47	CM – 900
IX – 9	XLIX – 49	MMMCDXLVIII – 3458

8. **Oś liczbowa.**

Oś liczbowa to prosta z zaznaczonym kierunkiem (strzałka), punktem zerowym i wyznaczoną jednostką (najczęściej zaznaczoną liczbą 1). Oś liczbowa służy do prezentacji graficznej liczb rzeczywistych (zaznaczania liczb rzeczywistych).



9. **Cechy podzielności.**

***Cecha podzielności liczby przez 2* –** liczba naturalna jest podzielna przez dwa (jest parzysta), jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 0, 2, 4, 6 lub 8. Na przykład: Liczba 83564504 jest podzielna przez dwa bo ostatnią cyfrą w zapisie (cyfrą jedności) jest 4.
***Cecha podzielności liczby przez 3* –** liczba naturalna jest podzielna przez trzy, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Na przykład: Liczba 638208 jest podzielna przez trzy, bo gdy dodamy jej cyfry otrzymamy 6 + 3 + 8 + 2 + 0 + 8 = 27. Liczba 27 jest podzielna przez 3, więc liczba 638208 również jest podzielna przez 3.
***Cecha podzielności liczby przez 4* –** liczba naturalna jest podzielna przez cztery, jeśli liczba utworzona z cyfry dziesiątek i cyfry jedności jest podzielna przez 4. Na przykład: Liczba 720464 jest podzielna przez cztery, bo liczba 64 (dwie ostatnie cyfry) jest podzielna przez 4.
***Cecha podzielności liczby przez 5* –** liczba naturalna jest podzielna przez pięć, jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 0 lub 5. Na przykład: Liczba 7237845 jest podzielna przez pięć bo ostatnią cyfrą w zapisie (cyfrą jedności) jest 5.
***Cecha podzielności liczby przez 6* –** liczba naturalna jest podzielna przez sześć, jeśli jest podzielna przez dwa i przez trzy (zgodnie z wcześniejszymi cechami podzielności).
***Cecha podzielności liczby przez 9* –** liczba naturalna jest podzielna przez dziewięć, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Na przykład: Liczba 824463 jest podzielna przez dziewięć, bo gdy dodamy jej cyfry otrzymamy 8 + 2 + 4 + 4 + 6 + 3 = 27. Liczba 27 jest podzielna przez 9, więc liczba 824463 również jest podzielna przez 9.
***Cecha podzielności liczby przez 10* –** liczba naturalna jest podzielna przez dziesięć, jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 0. Na przykład: Liczba 638260 jest podzielna przez dziesięć, bo ostatnią cyfrą w zapisie (cyfrą jedności) jest 0.

10. **Działanie potęgowania.**

Definicja potęgi o wykładniku naturalnym.

Potęgą o wykładniku naturalnym nazywamy działanie, w którym:

$$a^0 = 1 \qquad a \in R,\ a \neq 0$$
$$a^1 = a \qquad a \in R$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
....
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{n\text{ - czynników}} \qquad n \in N$$

a – dowolna liczba rzeczywista
n – liczba naturalna
∈ - symbol „należy”
R – zbiór liczb rzeczywistych
N – zbiór liczb naturalnych
≠ - symbol „różne”

Tabliczka potęgowania.

Kwadrat liczb naturalnych	Kwadrat liczb naturalnych	Sześcian liczb naturalnych	Potęgi liczby 2
$0^2 = 0$	$11^2 = 121$	$0^3 = 0$	$2^0 = 1$
$1^2 = 1$	$12^2 = 144$	$1^3 = 1$	$2^1 = 2$
$2^2 = 4$	$13^2 = 169$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$
$3^2 = 9$	$14^2 = 196$	$3^3 = 27$	$2^3 = 8$
$4^2 = 16$	$15^2 = 225$	$4^3 = 64$	$2^4 = 16$
$5^2 = 25$	$16^2 = 256$	$5^3 = 125$	$2^5 = 32$
$6^2 = 36$	$17^2 = 289$	$6^3 = 216$	$2^6 = 64$
$7^2 = 49$	$18^2 = 324$	$7^3 = 343$	$2^7 = 128$
$8^2 = 64$	$19^2 = 361$	$8^3 = 512$	$2^8 = 256$
$9^2 = 81$	$20^2 = 400$	$9^3 = 729$	$2^9 = 512$
$10^2 = 100$	$25^2 = 625$	$10^3 = 1000$	$2^{10} = 1024$

Definicja potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym.

Potęgą o wykładniku całkowitym ujemnym nazywamy działanie, w którym:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$$a \in R, \quad a \neq 0, n \in N$$

a – dowolna liczba rzeczywista
n – liczba naturalna
∈ - symbol „należy”
R – zbiór liczb rzeczywistych
N – zbiór liczb naturalnych
≠ - symbol „różne”

Potęgowanie liczb ujemnych:

Potęgowanie liczb ujemnych odbywa się według zasady:

a) jeśli wykładnik potęgi jest liczbą parzystą, to wynik potęgowania będzie liczbą dodatnią. Na przykład:

$$(-2)^4 = 16, \qquad (-12)^2 = 144, \qquad (-1)^{24} = 1$$

b) jeśli wykładnik potęgi jest liczbą nieparzystą, to wynik potęgowania będzie liczbą ujemną. Na przykład:

$$(-2)^5 = -32, \qquad (-5)^3 = -125, \qquad (-1)^{31} = -1$$

UWAGA! Potęgując liczbę ujemną lub ułamek zwykły, należy zapisać tą liczbę w nawiasie! Gdy nawisu brak, otrzymujemy zupełnie inne działanie. Przykłady:

$$(-5)^2 = 25, \ ale \ -5^2 = -25 \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}, \ ale \ \frac{3^3}{4} = \frac{27}{4}$$

---

11. **Działanie pierwiastkowania.**

Definicja pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej.

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej *a* nazywamy działanie, w którym:

$$\sqrt{a} = x, \qquad wtedy, gdy \ \ x^2 = a, \qquad a \geq 0$$

Definicja pierwiastka sześciennego.

Pierwiastkiem sześciennym z liczby *a* nazywamy działanie, w którym:

$$\sqrt[3]{a} = x, \qquad wtedy, gdy \ \ x^3 = a$$

Podczas pierwiastkowania liczb całkowitych korzystamy z tabliczki potęgowania. Przykłady:

$$\sqrt{25}=5,\quad bo\ \ 5^2=25$$
$$\sqrt{256}=16,\quad bo\ \ 16^2=256$$

$$\sqrt[3]{27}=3,\quad bo\ \ 3^3=27$$
$$\sqrt[3]{-1000}=-10,\quad bo\ \ (-10)^3=-1000$$

---

12. **Działania na ułamkach zwykłych.**

Dodawanie ułamków zwykłych. Należy wykonać kolejne czynności:

a) sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika.
b) dodać części całkowite liczb i liczniki części ułamkowych. Mianownik nie ulega zmianie.
c) jeśli część ułamkowa jest zapisana w postaci niewłaściwej (licznik większy od mianownika) należy wyłączyć całość i dodać ją do części całkowitej.
d) jeśli jest to możliwe należy skrócić część ułamkową (rzadko się zdarza).

Przykład:

$$4\frac{5}{6}+7\frac{3}{8}=4\frac{20}{24}+7\frac{9}{24}=11\frac{29}{24}=12\frac{5}{25}$$

Odejmowanie ułamków zwykłych. Należy wykonać kolejne czynności:

a) sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika.
b) jeśli licznik pierwszego ułamka jest mniejszy od licznika ułamka drugiego należy zamienić jedną całość na części ułamkowe (na zasadzie zamiany liczby mieszanej do postaci ułamka niewłaściwego). Jeśli licznik pierwszego ułamka jest większy od licznika ułamka drugiego od razu realizujemy następną czynność (podpunkt c).
c) odjąć części całkowite liczb i liczniki części ułamkowych. Mianownik nie ulega zmianie.
d) jeśli jest to możliwe należy skrócić część ułamkową (rzadko się zdarza).

Przykład:

$$8\frac{1}{4}-3\frac{9}{14}=8\frac{7}{28}-3\frac{18}{28}=7\frac{35}{28}-3\frac{18}{28}=4\frac{17}{28}$$

Mnożenie ułamków zwykłych. Należy wykonać kolejne czynności:

a) części całkowite liczb zamienić do postaci ułamka (zamiana do postaci niewłaściwej).
b) skrócić licznik pierwszego ułamka z mianownikiem ułamka drugiego i mianownik pierwszego ułamka z licznikiem drugiego.
c) pomnożyć liczniki ułamków (skrócone) i mianowniki ułamków (skrócone).
d) wyłączyć całości.

Przykład:

$$5\frac{1}{4}\cdot 2\frac{4}{7}=\frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cdot\frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{1}{\cancel{7}}}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$$

Sytuacja szczególna:

$$6\cdot 1\frac{1}{9}=\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{1}\cdot\frac{10}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$$

Dzielenie ułamków zwykłych. Należy wykonać kolejne czynności:

a) części całkowite liczb zamienić do postaci ułamka (zamiana do postaci niewłaściwej).
b) odwrócić dzielnik, czyli zamienić miejscami licznik i mianownik w drugiej liczbie. Równocześnie zamienić działanie dzielenie na mnożenie.
c) skrócić licznik pierwszego ułamka z mianownikiem ułamka drugiego i mianownik pierwszego ułamka z licznikiem drugiego.
d) pomnożyć liczniki ułamków (skrócone) i mianowniki ułamków (skrócone).
e) wyłączyć całości.

Przykład:

$$5\frac{5}{6}:3\frac{1}{8}=\frac{35}{6}:\frac{25}{8}=\frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{25}}}=\frac{28}{15}=1\frac{13}{15}$$

Sytuacja szczególna:

$$41\frac{1}{4}:15=\frac{165}{4}:\frac{15}{1}=\frac{\cancelto{11}{165}}{4}\cdot\frac{1}{\cancelto{1}{15}}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$$

Potęgowanie ułamków zwykłych (wykładnik naturalny). Należy wykonać kolejne czynności:

a) część całkowitą podstawy potęgi zamienić do postaci ułamka (zamiana do postaci niewłaściwej).
b) podnieść do potęgi licznik ułamka i podnieść do potęgi mianownik ułamka.
c) wyłączyć całości.

Przykład:

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}=2\frac{10}{27}$$

Potęgowanie ułamków zwykłych (wykładnik całkowity ujemny). Należy wykonać kolejne czynności:

a) część całkowitą podstawy potęgi zamienić do postaci ułamka (zamiana do postaci niewłaściwej – jeśli zajdzie taka potrzeba).
b) podnieść do potęgi licznik ułamka i podnieść do potęgi mianownik ułamka i równocześnie odwrócić liczbę (zamienić miejscami licznik i mianownik)
c) wyłączyć całości (jeśli zajdzie taka potrzeba).

Przykłady:

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{25}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$$

Pierwiastkowanie ułamków zwykłych. Należy wykonać kolejne czynności:

a) część całkowitą liczby podpierwiastkowej zamienić do postaci ułamka (zamiana do postaci niewłaściwej).
b) wykonać osobno pierwiastkowanie licznika ułamka i mianownika ułamka (jeśli pierwiastek jest liczbą niewymierną nie wykonujemy pierwiastkowania – w wyniku zapisujemy liczbę w postaci działania pierwiastkowania).
c) wyłączyć całości.

Przykład:

$$\sqrt{6\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

Sytuacja szczególna (gdy trzeba usunąć niewymierność z mianownika):

$$\sqrt{8\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

UWAGA! Działania na ułamkach zwykłych z udziałem liczb ujemnych wykonuje się zgodnie z zasadami określonymi w punkcie 5.

---

13. **Działania pisemne na liczbach naturalnych i ułamkach dziesiętnych.**

Dodawanie: Ułamki dziesiętne zapisujemy „przecinek pod przecinkiem”. Na przykład:

35801 + 5482 = 41283

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1} \\ 35801 \\ +\ \underline{\ \ 5482} \\ 41283 \end{array}$$

63,78 + 5,926 = 69,706

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1} \\ 63{,}78 \\ +\ \underline{\ \ 5{,}926} \\ 69{,}706 \end{array}$$

Odejmowanie: Ułamki dziesiętne zapisujemy „przecinek pod przecinkiem”. Należy pamiętać o konieczności „pożyczania” jednostki z cyfry wyższej i zamieniać na 10 jednostek cyfry niższej, gdy zachodzi taka potrzeba. Na przykład:

62963 – 8271 = 54692

```
 5 12 8 16
 62963
- 8271
 54692
```

831,7 – 90,58 = 741,12

```
  7 13  6 10
  831,70
-  90,58
  741,12
```

Mnożenie: Ułamki dziesiętne zapisujemy tak, aby ostatnie cyfry w zapisie obu liczb znalazły się jedna pod drugą. W przypadku, gdy mnożymy ułamki dziesiętne, ilość cyfr po przecinku w wyniku działania powinna być sumą ilości cyfr po przecinku w obu czynnikach. Mnożenie wykonujemy tak, jak w przykładach:

769 · 6 = 4614

```
   4 5
   769
·    6
  4614
```

64,29 · 1,6 = 102,864

```
     2 1  3
     64,2 5
·       1,6
   3 855 0
  +6 425
  102,80 0
```

Dzielenie: Podczas dzielenia liczby przez ułamek dziesiętny należy najpierw przesunąć przecinek w obu liczbach, tak aby dzielnik (druga liczba) była całkowita. Dzielenie wykonujemy tak, jak w przykładach:

2634 : 8 = 329,25

```
   329,25
  2634 : 8
 -24
  23
 -16
   74
  -72
    20
   -16
     40
   - 40
     ==
```

731 : 3 = $234\frac{2}{3}$

```
  234
  731 : 3
 -6
  13
 -12
   11
  - 9
    2
```

6,79 : 0,4 = 67,9 : 4 = 16,975

```
  16,975
  67,9 : 4
 -4
  27
 -24
   39
  -36
    30
   -28
     20
   - 20
     ==
```

UWAGA! Działania pisemne można wykonywać tylko na liczbach dodatnich. Wynik odejmowania też musi być liczbą dodatnią (nie można od liczby mniejszej odjąć większej). Aby wykonać działanie na liczbach ujemnych trzeba najpierw ustalić znak wyniku, a następnie umiejętnie wybrać działanie pisemne prowadzące do wyliczenia odpowiedniej wartości zgodnie z zasadami określonymi w punkcie 5.

14. Mnożenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000, 10000 itd.

Mnożąc ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000, 10000 itd. przesuwamy przecinek w prawo o tyle miejsc, ile zer występuje w liczbie, przez którą mnożymy. Na przykład:

2,56 · 10 = 25,6
0,3472 · 100 = 34,72
9,23 · 1000 = 9230

Dzieląc ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000, 10000 itd. przesuwamy przecinek w lewo o tyle miejsc, ile zer występuje w dzielniku, przez który dzielimy. Na przykład:

82,4 : 10 = 8,24
4,6 : 100 = 0,046
0,034 : 1000 = 0,000034

15. **Porównywanie liczb.**

Do porównywania liczb używamy znaków:

$>$ znak większości
$<$ znak mniejszości
$=$ znak równości

Porównywanie liczb całkowitych:

Wśród liczb naturalnych obowiązuje porządek rosnący: 0 , 1, 2, 3, 4,5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 … itd…
Wśród liczb całkowitych ujemnych porządek jest odwrotny w porównaniu z odpowiadającymi im liczbami dodatnimi przeciwnymi. Np.:

$-6 > -7$ bo $6 < 7$ $-12 > -15$ bo $12 < 15$ $-4 < -1$ bo $4 > 1$

Każda liczba dodatnia jest większa od ujemnej. Np. $4 > -8$, $10 > -1$, $7{,}3 > -0{,}5$, $1\frac{1}{7} > -2{,}4$

Zero jest większe od każdej liczby ujemnej. Zero jest mniejsze od każdej liczby dodatniej. Np.:

$0 > -5$, $0 > -1{,}7$ $0 > -6\frac{2}{3}$, $0 < 14$, $0 < 3{,}6$, $0 < 2\frac{1}{3}$

Porównywanie ułamków zwykłych:

Z dwóch dodatnich ułamków o tych samych mianownikach większy jest ten, który ma większy licznik. Jeśli ułamki mają różne mianowniki można sprowadzić je do wspólnego mianownika.
Przykłady:

$\frac{4}{13} > \frac{2}{13}$ $8\frac{5}{14} < 8\frac{9}{14}$ $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, bo $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ (wspólny mianownik)

UWAGA! W przypadku liczb ujemnych porządek jest odwrotny w porównaniu z odpowiadającymi im liczbami dodatnimi przeciwnymi. Np.:

$$-\frac{7}{15} > -\frac{11}{15}, \text{ bo } \frac{7}{15} < \frac{11}{15}$$

Porównywanie ułamków dziesiętnych:

Porównując ułamki dziesiętne sprawdzamy najpierw części całkowite liczby, a potem kolejno poszczególne cyfry zaczynając od cyfry części dziesiątych (pierwsze miejsce po przecinku). Np.:

$\underline{12},57 < \underline{173},57$
bo podczas sprawdzania różnica widoczna jest w częściach całkowitych liczb (cyfr po przecinku już nie sprawdzamy).

$3,4\underline{5}2 < 3,4\underline{6}1$
bo podczas sprawdzania odnajdujemy różnicę na drugim miejscu po przecinku (dalszych cyfr już nie sprawdzamy).

$15,73\underline{8} > 15,73\underline{4}1$
bo podczas sprawdzania odnajdujemy różnicę na trzecim miejscu po przecinku (dalszych cyfr już nie sprawdzamy).

$0,(8) > 0,8$ bo $0,8\underline{8}88888\ldots > 0,8\underline{0}0000\ldots$
bo ułamek okresowy ma w rozwinięciu dziesiętnym nieskończenie wiele cyfr 8, więc już na drugim miejscu po przecinku odnajdujemy różnicę.

UWAGA! W przypadku liczb ujemnych porządek jest odwrotny w porównaniu z odpowiadającymi im liczbami dodatnimi przeciwnymi. Np.:

$$-0{,}354 > -0{,}37, \text{ bo } 0{,}354 < 0{,}37$$

Porównywanie ułamków dziesiętnych ze zwykłymi:

Aby porównać ułamek dziesiętny ze zwykłym, należy zamienić ułamek dziesiętny do postaci zwykłej lub ułamek zwykły do postaci dziesiętnej. Następnie porównać, tak jak w przykładach powyżej.

16. Potęgowanie i pierwiastkowanie ułamków dziesiętnych.

Gdy potęgujemy ułamek dziesiętny potęgą stopnia drugiego (kwadrat), postępujemy według zasad:

a) korzystamy z tabliczki potęgowania, tak jakby liczba nie była ułamkiem dziesiętnym (ignorujemy przecinek i zera w zapisie liczby).

b) zapisujemy przecinek w wyniku w takim miejscu, aby ilość miejsc po przecinku wzrosła dwukrotnie.

Przykłady:

$0{,}5^2 = 0{,}25$		$0{,}007^2 = 0{,}000049$		$1{,}4^2 = 1{,}96$	
jedno miejsce po przecinku	dwa miejsca po przecinku	trzy miejsca po przecinku	sześć miejsc po przecinku	jedno miejsce po przecinku	dwa miejsca po przecinku

Gdy potęgujemy ułamek dziesiętny potęgą stopnia trzeciego (sześcian), postępujemy według zasad:

a) korzystamy z tabliczki potęgowania, tak jakby liczba nie była ułamkiem dziesiętnym (ignorujemy przecinek i zera w zapisie liczby).

b) zapisujemy przecinek w wyniku w takim miejscu, aby ilość miejsc po przecinku wzrosła trzykrotnie.

Przykłady:

$0{,}2^3 = 0{,}008$		$0{,}05^3 = 0{,}000125$		$0{,}004^3 = 0{,}000000064$	
jedno miejsce po przecinku	trzy miejsca po przecinku	dwa miejsca po przecinku	sześć miejsc po przecinku	trzy miejsca po przecinku	dziewięć miejsc po przecinku

Gdy pierwiastkujemy ułamek dziesiętny pierwiastkiem stopnia drugiego (kwadratowym), postępujemy według zasad:

a) pierwiastkujemy liczbę, tak jakby nie była ułamkiem dziesiętnym (ignorujemy przecinek i zera w zapisie liczby).

b) zapisujemy przecinek w wyniku w takim miejscu, aby ilość miejsc po przecinku zmniejszyła się dwukrotnie.

Przykłady:

$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$		$\sqrt{0{,}0081} = 0{,}09$		$\sqrt{0{,}00000225} = 0{,}0015$	
dwa miejsca po przecinku	jedno miejsce po przecinku	cztery miejsca po przecinku	dwa miejsca po przecinku	osiem miejsc po przecinku	cztery miejsca po przecinku

Gdy pierwiastkujemy ułamek dziesiętny pierwiastkiem stopnia trzeciego (sześciennym), postępujemy według zasad:

a) pierwiastkujemy liczbę, tak jakby nie była ułamkiem dziesiętnym (ignorujemy przecinek i zera w zapisie liczby).

b) zapisujemy przecinek w wyniku w takim miejscu, aby ilość miejsc po przecinku zmniejszyła się trzykrotnie.

Przykłady:

$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$		$\sqrt{0{,}027} = 0{,}3$		$\sqrt{0{,}000125} = 0{,}05$	
trzy miejsca po przecinku	jedno miejsce po przecinku	trzy miejsca po przecinku	jedno miejsce po przecinku	sześć miejsc po przecinku	dwa miejsca po przecinku

UWAGA! Jeśli podczas pierwiastkowania nie da się zastosować powyższych zasad, to znaczy, że wynik jest niewymierny.

---

17. Prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Prawo mnożenia potęg o tych samych podstawach:

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

a – dowolna liczba rzeczywista różna od zera.
n, k – dowolne liczby całkowite.

Mnożąc potęgi o tej samej podstawie dodajemy ich wykładniki.

Przykład: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$

Prawo dzielenia potęg o tych samych podstawach:

$$\boxed{a^n : a^k = a^{n-k}}$$

a – dowolna liczba rzeczywista różna od zera.
n, k – dowolne liczby całkowite.

Dzieląc potęgi o tej samej podstawie odejmujemy ich wykładniki.

Przykłady: $2^9 : 2^4 = 2^5 = 32$ $\qquad \frac{3^{10}}{3^8} = 3^2 = 9$

Prawo mnożenia potęg o tych samych wykładnikach (prawo potęgowania iloczynu):

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

a, b – dowolne liczby rzeczywiste różna od zera.
n – dowolna liczba całkowita.

Mnożąc potęgi o tym samym wykładniku można najpierw pomnożyć ich podstawy.
Przykład: $2^7 \cdot 5^7 = 10^7 = 10000000$

UWAGA! Jeśli zapiszemy prawo zamieniając jego strony, otrzymamy prawo potęgowania iloczynu, czyli prawo rozdzielności potęgowania względem mnożenia.

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Prawo dzielenia potęg o tych samych wykładnikach (prawo potęgowania ilorazu):

$$\boxed{a^n : b^n = (a : b)^n}$$

a, b – dowolne liczby rzeczywiste różna od zera.
n – dowolna liczba całkowita.

Dzieląc potęgi o tym samym wykładniku można najpierw podzielić ich podstawy.

Przykłady: $72^5 : 36^5 = (72 : 36)^5 = 2^5 = 32$ $\qquad \frac{36^4}{12^4} = \left(\frac{36}{12}\right)^4 = 3^4 = 81$

UWAGA! Jeśli zapiszemy prawo zamieniając jego strony, otrzymamy prawo potęgowania ilorazu, czyli prawo rozdzielności potęgowania względem dzielenia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Prawo potęgowania potęgi:

$$\boxed{(a^n)^k = a^{n \cdot k}}$$

a – dowolna liczba rzeczywista różna od zera.
n, k – dowolne liczby całkowite.

Potęgując potęgę można pomnożyć wykładniki.

Przykład: $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

Prawo potęgowania pierwiastka (pierwiastkowania potęgi):

$$\boxed{\sqrt[n]{a}^{\,n} = a \quad \text{albo} \quad \sqrt[n]{a^n} = a}$$

a – dowolna liczba rzeczywista dodatnia.
n – dowolna liczba naturalna większa od 1.

Potęga i pierwiastek tego samego stopnia wzajemnie się skracają. UWAGA! Prawo jest prawdziwe tylko dla liczb dodatnich!

Przykład: $\sqrt{37^2} = 37$ $\qquad \sqrt[3]{19}^{\,3} = 19$

Prawo mnożenia pierwiastków tego samego stopnia:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

a, b – dowolne liczby rzeczywiste dodatnie.
n – dowolna liczba naturalna większa od 1.

Mnożąc pierwiastki tego samego stopnia można najpierw pomnożyć liczby podpierwiastkowe.

Przykład: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}=4$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{27}=3$

UWAGA! Jeśli zapiszemy prawo zamieniając jego strony, otrzymamy prawo pierwiastkowania iloczynu, czyli prawo rozdzielności pierwiastkowania względem mnożenia.

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

Prawo dzielenia pierwiastków tego samego stopnia:

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$$

a, b – dowolne liczby rzeczywiste dodatnie.
n – dowolna liczba naturalna większa od 1.

Dzieląc pierwiastki tego samego stopnia można najpierw podzielić liczby podpierwiastkowe.

Przykład: $\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{27}=3$

UWAGA! Jeśli zapiszemy prawo zamieniając jego strony, otrzymamy prawo pierwiastkowania ilorazu, czyli prawo rozdzielności pierwiastkowania względem dzielenia.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

---

18. **Pierwiastkowanie, a liczby niewymierne – zamiana postaci liczby niewymiernej.**

Pierwiastkowanie jest działaniem, które często prowadzi do otrzymywania liczb niewymiernych. Liczby niewymierne to te, których nie można zapisać w postaci ułamka zwykłego. Wartości tych liczb można podać tylko w przybliżeniu, więc często prezentuje się je za pomocą działania (pierwiastkowania, logarytmu), wartości funkcji (funkcje trygonometryczne) lub ukrywa się je pod symbolami literowymi (np. π, e).

Przykłady liczb niewymiernych otrzymywanych na drodze pierwiastkowania:

$\sqrt{2}\approx 1{,}41$
$\sqrt{3}\approx 1{,}73$
$\sqrt{5}\approx 2{,}24$

Wyłączanie czynnika spod znaku pierwiastka.

W przypadku, gdy pierwiastkowanie liczby całkowitej prowadzi do otrzymania wyniku w postaci liczby niewymiernej, korzystamy z prawa rozdzielności pierwiastkowania względem mnożenia, aby zapisać działanie w postaci iloczynu liczby całkowitej i pierwiastka. Wykonujemy kolejno czynności:

a) Rozkładamy liczbę podpierwiastkową na dwa czynniki. Pierwszy czynnik musi być liczbą, z której można obliczyć całkowity pierwiastek (zgodnie z tabliczką potęgowania tymi liczbami mogą być w przypadku pierwiastka kwadratowego 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 itd…, a w przypadku pierwiastka sześciennego 8, 27, 64, 125 itd…). Drugi czynnik powinien być możliwie jak najmniejszy.
b) Pierwiastkujemy pierwszy czynnik i zapisujemy go przed pierwiastkiem z drugiego czynnika.

Przykład:

$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{200}=\sqrt{100\cdot 2}=10\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}$

Usuwanie niewymierności z mianownika.

W przypadku, gdy wynik działania otrzymamy w postaci ułamka z liczbą niewymierną w postaci pierwiastka stopnia drugiego w mianowniku, należy usunąć ten pierwiastek z mianownika wykonując czynności:

a) rozszerzamy ułamek przez liczbę zapisaną w postaci pierwiastka, która znajduje się w mianowniku (mnożymy licznik i mianownik przez ten pierwiastek).
b) wykonujemy odpowiednie działania w liczniku i mianowniku ułamka.
c) skracamy ułamek (jeśli jest to możliwe).

Przykład: $\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $\dfrac{8}{3\sqrt{2}}=\dfrac{8\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

W przypadku, gdy wynik działania otrzymamy w postaci ułamka z liczbą niewymierną w postaci pierwiastka stopnia trzeciego w mianowniku, należy usunąć ten pierwiastek z mianownika wykonując czynności:

a) rozszerzamy ułamek przez liczbę, która jest kwadratem liczby zapisanej w mianowniku w postaci pierwiastka (mnożymy licznik i mianownik przez ten pierwiastek).
b) wykonujemy odpowiednie działania w liczniku i mianowniku ułamka.
c) skracamy ułamek (jeśli jest to możliwe).

Przykład:
$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$$

W przypadku, gdy w mianowniku ułamka znajduje się wyrażenie w postaci sumy lub różnicy liczb z udziałem liczb niewymiernych zapisanych w postaci pierwiastka kwadratowego, należy usunąć te pierwiastki z mianownika wykonując czynności:

a) rozszerzamy ułamek przez wyrażenie, które znajduje się w mianowniku ułamka, zmieniając jedynie znak „+” na znak „–”, albo znak „–” na znak „+” (mnożymy licznik i mianownik przez to wyrażenie.
b) wykonujemy odpowiednie działania w liczniku i mianowniku ułamka.
c) skracamy ułamek lub wykonujemy odpowiednie dzielenie (jeśli jest to możliwe).

Przykład:
$$\frac{6}{2-\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right) \cdot \left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{12+6\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2} = \frac{12+6\sqrt{2}}{2} = 6+3\sqrt{2}$$

---

19. Nazywanie i odczytywanie liczb wielocyfrowych. Notacja wykładnicza.

Liczby wielocyfrowe o dużych wartościach:

Nazwy liczb będących potęgami liczby 10			
1 = 10^0	**jeden**	**10 000 000 000 = 10^{10}**	**dziesięć miliardów**
10 = 10^1	**dziesięć**	**100 000 000 000 = 10^{11}**	**sto miliardów**
100 = 10^2	**sto**	**1 000 000 000 000 = 10^{12}**	**bilion**
1 000 = 10^3	**tysiąc**	**1 000 000 000 000 000 = 10^{15}**	**biliard**
10 000 = 10^4	**dziesięć tysięcy**	**1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}**	**trylion**
100 000= 10^5	**sto tysięcy**	**1 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{21}**	**tryliard**
1 000 000= 10^6	**milion**	**1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{24}**	**kwadrylion**
10 000 000= 10^7	**dziesięć milionów**	**1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{30}**	**kwintylion**
100 000 000 = 10^9	**sto milionów**		
1 000 000 000= 10^9	**miliard**	**itd…**	

Ilość zer w zapisie powyższych liczb, to wykładnik potęgi liczby 10 w zapisie wykładniczym.

Aby odczytać liczbę wielocyfrową stosujemy nazwy cyfr zgodnie z powyższą tabelą, np.:

34 982 700 000 to **trzydzieści cztery miliardy dziewięćset osiemdziesiąt dwa miliony siedemset tysięcy.**
2 301 750 000 000 to **dwa biliony trzysta jeden miliardów siedemset pięćdziesiąt milionów**

Liczby wielocyfrowe o małych wartościach:

Nazwy liczb będących potęgami liczby 10			
0,1 = 10^{-1}	**jedna dziesiąta**	**0,00 000 000 001 = 10^{-11}**	**jedna stumiliardowa**
0,01 = 10^{-2}	**jedna setna**	**0,00 000 000 000 1 = 10^{-12}**	**jedna bilionowa**
0,001 = 10^{-3}	**jedna tysięczna**	**0,00 000 000 000 01 = 10^{-13}**	**jedna dziesięciobilionowa**
0,00 01 = 10^{-4}	**jedna dziesięciotysięczna**	**0,00 000 000 000 001 = 10^{-14}**	**jedna stubilionowa**
0,00 001 = 10^{-5}	**jedna stutysięczna**	**0,00 000 000 000 000 1 = 10^{-15}**	**jedna trylionowa**
0,00 000 1= 10^{-6}	**jedna milionowa**	**0,00 000 000 000 000 01 = 10^{-16}**	**jedna dziesięciotrylionowa**
0,00 000 01= 10^{-7}	**jedna dziesięciomilionowa**		
0,00 000 001= 10^{-8}	**jedna stumilionowa**	**itd…**	
0,00 000 000 1 = 10^{-9}	**jedna miliardowa**		
0,00 000 000 01= 10^{-10}	**jedna dziesięciomiliardowa**		

Ilość zer w zapisie powyższych liczb, to wartość wykładnika potęgi liczby 10 w zapisie wykładniczym (zapisanego z minusem).

Aby odczytać liczbę wielocyfrową stosujemy nazwy cyfr zgodnie z powyższą tabelą, np.:

0,00 000 048	to	**czterdzieści osiem stumilionowych.**
0,00 000 029 57	to	**dwa tysiące dziewięćset pięćdziesiąt siedem dziesięciomiliardowych**

<u>*Notacja wykładnicza*</u> – to uproszczony zapis liczb wielocyfrowych

Zapis liczby w notacji wykładniczej:

$$4{,}38 \cdot 10^{13}$$

liczba dziesiętna większa od 1 i mniejsza niż 10 — mnożenie — potęga liczby dziesięć

Przykład 1: Aby zapisać liczbę **572 000 000 000** za pomocą notacji wykładniczej, należy:

a) wstawić przecinek w tej liczbie tak, aby znajdowała się po jego lewej stronie tylko jedna cyfra (różna od zera):

5,72000000000

b) pomijamy zera w zapisie liczby (nie są potrzebne):

5,72~~000000000~~

c) liczymy ilość cyfr, które znalazły się po prawej stronie przecinka (włącznie ze skreślanymi zerami):

5,72~~000000000~~

jedenaście cyfr (miejsc po przecinku)

d) zapisujemy liczbę w notacji wykładniczej, gdzie liczba 10 podniesiona jest do potęgi, której wykładnik jest ilością cyfr „odkreślonych" przecinkiem:

$$\mathbf{5{,}72 \cdot 10^{11}}$$

Przykład 2: Aby zapisać liczbę **0,00 000 004 648** za pomocą notacji wykładniczej, należy:

a) przesunąć przecinek w tej liczbie tak, aby znajdowała się po jego lewej stronie tylko jedna cyfra (różna od zera):

000000004,648

b) pomijamy zera w zapisie liczby (nie są potrzebne):

~~00000000~~4,648

c) liczymy ilość cyfr, które „ominęliśmy" przesuwając przecinek (włącznie ze skreślanymi zerami). Można zauważyć, że ilość tych cyfr jest równa ilości zer znajdujących się przed cyfrą 4.

~~00000000~~4,648

osiem cyfr (siedem zer i czwórka)

d) zapisujemy liczbę w notacji wykładniczej, gdzie liczba 10 podniesiona jest do potęgi, której wykładnik jest ilością cyfr „ominiętych" przecinkiem zapisaną ze znakiem <u>**minus**</u>:

$$\mathbf{4{,}648 \cdot 10^{-8}}$$

Przykład 3: Przypadki szczególne. W liczbach 60 000 000 lub 0,00 000 000 000 09 w zapisie za pomocą notacji wykładniczej nie będzie występować przecinek:

$$\mathbf{60000000 = 6 \cdot 10^{7}}$$
$$\mathbf{0{,}0000000000009 = 9 \cdot 10^{-13}}$$

20. **Ważne pojęcia arytmetyczne i statystyczne.**

Stosunek dwóch wielkości (stosunek dwóch liczb) to iloraz dwóch wielkości. Na przykład stosunek liczb 3 i 7 to: $\frac{3}{7}$ lub 3 : 7. Stosunek dwóch liczb mówi nam ile razy jedna liczba jest większa od drugiej lub jaką częścią jednej wielkości jest druga.

Średnia arytmetyczna liczb to suma tych liczb podzielona przez ich ilość. Na przykład: Średnia arytmetyczna liczb 5, 8, 2, -3, 1, 10 i 4 i 11 wynosi:

$$\frac{5+8+2+(-3)+1+10+4+11}{8}=4\frac{3}{4}$$

Średnia arytmetyczna jest często wykorzystywana do obliczania średniej ocen szkolnych.

Mediana liczb to środkowa liczba w rosnącym ciągu liczb, lub średnia arytmetyczna dwóch środkowych liczb w rosnącym ciągu liczb. Aby policzyć medianę kilku liczb, należy:

a) Ułożyć wszystkie liczby w kolejności od najmniejszej do największej,
b) Policzyć ilość wszystkich liczb,
c) Jeśli ilość liczb jest nieparzysta odnajdujemy liczbę, która stoi dokładnie w środku – liczba ta to mediana,
d) Jeśli ilość liczb jest parzysta odnajdujemy dwie liczby leżące dokładnie w środku i obliczamy ich średnią arytmetyczną – wynik średniej arytmetycznej to mediana.

Przykład:

Aby obliczyć średnią arytmetyczną liczb: 9, 4, 6, 2, 5, 4, 3, 6, 3, -1, 5, 4, 4, -3, -6 ustawiam je w kolejności od najmniejszej do największej: -6, -3, -1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 9. Liczę ilość liczb: jest ich 15. Środkowa liczba znajduje się na miejscu ósmym. Mediana to liczba 4.

Aby obliczyć średnią arytmetyczną liczb: 1, 4, -3, 8, 8, 6, 9, 10, 23, -2 ustawiam je w kolejności od najmniejszej do największej: -3, -2, 1, 4, 6, 8, 8, 9, 10, 23. Liczę ilość liczb: jest ich 10. Dwie środkowe liczby znajdują się na miejscach piątym i szóstym. Są to liczby 6 i 8. Obliczam ich średnią arytmetyczną:

$\frac{6+8}{2}=\frac{14}{2}=7$. Mediana to liczba 7.

Wartość bezwzględna liczby. Wartość bezwzględna liczby (dawna nazwa to „moduł”), to działanie określane w następujący sposób:

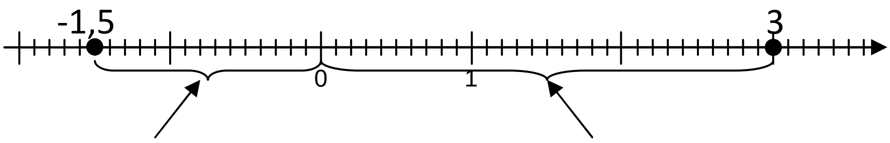
a) Wartość bezwzględna z liczby dodatniej lub zera to ta sama liczba, np.:

$|5|=5$ $|9|=9$ $|0|=0$ $|143|=143$ $|3{,}7|=3{,}7$ $\left|1\frac{1}{4}\right|=1\frac{1}{4}$ $\left|32\frac{5}{11}\right|=32\frac{5}{11}$

b) Wartość bezwzględna z liczby ujemnej, to przeciwna do niej liczba dodatnia, np.:

$|-5|=5$ $|-7|=7$ $|-14|=14$ $|-73|=73$ $|-6{,}1|=6{,}1$ $\left|-2\frac{1}{3}\right|=2\frac{1}{3}$ $\left|-59\frac{3}{16}\right|=59\frac{3}{16}$

Wartość bezwzględną można interpretować jako odległość liczby od zera na osi liczbowej:



Odległość liczby –1,5 od zera na osi liczbowej wynosi 1,5, czyli $|-1{,}5|=1{,}5$

Odległość liczby 3 od zera na osi liczbowej wynosi 3, czyli $|3|=3$

Część liczby. Aby obliczyć część (ułamek) danej wielkości (liczby), należy wykonać mnożenie pomiędzy ułamkiem określającym wielkość części oraz daną wielkością (liczbą). Np.:

Aby obliczyć $\frac{2}{3}$ liczby 69 wykonujemy działanie: $\frac{2}{3}\cdot 69=46$

Aby obliczyć szóstą część liczby 72 wykonujemy działanie: $\frac{1}{6}\cdot 72=12$

Ile razy jedna liczba jest większa od drugiej? Aby obliczyć, ile razy jedna liczba jest większa od drugiej, obliczamy stosunek tych liczb. Np.:

- Ile razy liczba 60 jest większa niż 15? Wykonujemy działanie $60:15=4$. Odpowiedź: liczba 60 jest cztery razy większa od liczby 15.
- Ile razy liczba 7,2 jest większa niż 1,5? Wykonujemy działanie $7{,}2:1{,}5=4{,}8$. Odpowiedź: liczba 7,2 jest cztery i osiem dziesiątych razy większa od liczby 1,5.

O ile jedna liczba jest większa od drugiej? Aby obliczyć, o ile jedna liczba jest większa od drugiej, obliczamy różnicę tych liczb. Np.:

- O ile liczba 60 jest większa niż 15? Wykonujemy działanie $60-15=45$. Odpowiedź: liczba 60 jest o czterdzieści pięć większa od liczby 15.
- O ile liczba 7,2 jest większa niż 1,5? Wykonujemy działanie $7{,}2-1{,}5=5{,}7$. Odpowiedź: liczba 7,2 jest o pięć i siedem dziesiątych większa od liczby 1,5.

Opracował: Paweł Góralczyk

Gimnazjum Społeczne im. Lady Sue Ryder w Woli Batorskiej