ALGEBRA I ANALIZA

Treść:

 - zagadnienie elementarne

 - zagadnienie wykraczające poza program

ANALIZA I ALGEBRA

1. Wyrażenia algebraiczne.

Określenie: **Wyrażeniem algebraicznym** nazywamy takie działanie, w którym niektóre liczby mogą być ukryte pod symbolami literowymi. Przykłady:

$$a+2x \qquad x^2-3xy \qquad \frac{6xy^4+12x}{1{,}6x^5} \qquad \sqrt{a-8ab} \qquad \frac{3}{4}x^2y^2z \qquad (s^2-3)\cdot 3t$$

<u>*Rodzaje wyrażeń algebraicznych:*</u>

Jednomiany. Jednomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne w postaci iloczynu. W jednomianie nie występuje działanie dodawania ani odejmowania. Za najprostszy jednomian uznawana jest pojedyncza liczba (np. jednomian 5) lub liczba ukryta pod symbolem literowym (np. jednomian x). Przykłady:

$$6xy \qquad -12a^2 \qquad a \qquad 5 \qquad -7x^3y^3z^2 \qquad 4abc^2$$

Dwumiany. Dwumianem nazywamy wyrażenie algebraiczne w postaci sumy dwóch jednomianów. Przykłady:

$$6y+2x \qquad x^3y-7xy \qquad 8y^4+2x \qquad 9x+5y \qquad \frac{1}{3}x^2+6x$$

Trójmian. Trójmianem nazywamy wyrażenie algebraiczne w postaci sumy trzech jednomianów. Przykłady:

$$x^2+2x-7 \qquad x^3-7x^2+3 \qquad 5y^3+2xy+1$$

Suma algebraiczna. Wielomian. Sumą algebraiczną (wielomianem) nazywamy wyrażenie algebraiczne w postaci sumy jednomianów (dwumiany i trójmiany są sumami algebraicznymi). Przykłady:

$$x^3+2x^2-5x+8 \qquad y^3-7xy^2+3 \qquad x^4+2x^3y+11xy-y$$

---

2. Nazywanie wyrażeń algebraicznych.

Aby nazwać wyrażenie algebraiczne należy użyć odpowiednich nazw działań:

DODAWANIE – SUMA	POTĘGA STOPNIA DRUGIEGO – KWADRAT
ODEJMOWANIE – RÓŻNICA	POTĘGA STOPNIA TRZECIEGO – SZEŚCIAN
MNOŻENIE – ILOCZYN	POTĘGA STOPNIA n.
DZIELENIE – ILORAZ	PIERWIASTEK STOPNIA n.

Nazywanie wyrażenia rozpoczynamy od nazwy działania, które, zgodnie z kolejnością wykonywania działań, wykonywane byłoby na samym końcu. Potem określamy po kolei elementy tego działania. Przykłady:

$x+y^2$ W wyrażeniu algebraicznym występują dwa działania: dodawanie i potęgowanie. „Najsłabszym” działaniem jest dodawanie, więc wyrażenie algebraiczne nazwiemy: **sumą.** Po lewej stronie znaku „+” znajduje się liczba x, a po prawej stronie znaku „+” znajduje się działanie, w którym liczba y jest podniesiona do kwadratu. Tak więc wyrażenie możemy określić jako:

Suma liczby x i kwadratu liczby y

$\frac{3a-1}{t}$ W wyrażeniu algebraicznym występują trzy działania: odejmowanie, mnożenie i dzielenie. „Najsłabszym” działaniem jest dzielenie (gdyż licznik i mianownik są „zamknięte” w niewidocznych nawiasach), więc wyrażenie algebraiczne nazwiemy: **ilorazem.** W liczniku ułamka znajduje się działanie odejmowania: po lewej stronie znaku „–” znajduje się kolejne działanie – mnożenie pomiędzy liczbami 3 i x, a po prawej stronie znaku „–” znajduje się liczba 1. W mianowniku znajduje się liczba t. Tak więc wyrażenie możemy określić jako:

Iloraz różnicy iloczynu liczb 3 i x i liczby 1 przez liczbę t

$(6-a)(b+3)$ W wyrażeniu algebraicznym występują trzy działania: odejmowanie, mnożenie i dodawanie. „Najsłabszym” działaniem jest mnożenie (gdyż jest to jedyne działanie nie znajdujące się w nawiasie), więc wyrażenie algebraiczne nazwiemy: **iloczynem.** Czynnikami w tym iloczynie są dwa działania znajdujące się w nawiasach: po lewej stronie znajduje się odejmowanie pomiędzy liczbami 6 i a, a po prawej stronie znajduje się dodawanie pomiędzy liczbami b i 3. Tak więc wyrażenie możemy określić jako:

Iloczyn różnicy liczb 6 i a i sumy liczb b i 3

W nazywaniu wyrażeń algebraicznych mogą dodatkowo pojawić się następujące określenia:

- liczba o *n* większa,
- liczba o *n* mniejsza,
- liczba *k* razy większa,
- liczba *k* razy mniejsza,
- procent liczby,
- liczba większa o procent,
- liczba mniejsza o procent,
- krotność liczby,
- połowa liczby,
- stosunek liczb,
- średnia arytmetyczna liczb.

Przykłady:

Liczba o 7 większa od liczby x:	$x+7$	Liczba o 4 mniejsza od kwadratu y:	y^2-4
Liczba 3 razy większa od sumy liczb x i 6	$(x+6)\cdot 3$	Liczba osiem razy mniejsza od sześcianu liczby k:	$\frac{k^3}{8}$
60% liczby x:	$60\%\cdot x$	Liczba o 5% większa od a:	$a+5\%a$
Liczba o 30% mniejsza od x:	$x-30\%x$	Liczba dwukrotnie większa od t:	$2t$
Liczba trzykrotnie mniejsza od y:	$\frac{y}{3}$	Siódma wielokrotność liczby d:	$7d$
Połowa sumy liczb x i 8:	$\frac{x+8}{2}$	Stosunek liczb v i t:	$\frac{v}{t}$
Średnia arytmetyczna liczb x i y:	$\frac{x+y}{2}$	Średnia arytmetyczna liczb a, c i 10:	$\frac{a+c+10}{3}$

---

3. Obliczanie wartości sumy algebraicznej.

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażenia algebraicznego należy w miejsce symboli literowych wstawić konkretne liczby (podane w zadaniu) i wykonać działanie zgodnie z kolejnością ich wykonywania.

Przykład: Oblicz wartość liczbową wyrażenia algebraicznego $3x^2-4x-4$, dla $x=-\frac{1}{3}$.

$$3x^2-4x-4=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-4=3\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{3}-4=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-4=\frac{5}{3}-4=1\frac{2}{3}-4=-2\frac{1}{3}$$

UWAGA! Przed obliczeniem wartości powinno się doprowadzić wyrażenie do najprostszej postaci.

---

4. Prawa działań na liczbach.

Prawa działań na liczbach to sposoby, które umożliwiają wykonanie działania inaczej niż nakazuje to definicja działania lub zasada kolejności wykonywania działań.

Wyróżniamy kilka rodzajów praw działań:

Prawo przemienności: Prawo pozwalające na zamianę miejscami elementów działania. Prawo jest prawdziwe dla działania dodawania i mnożenia.

Prawo przemienności dodawania:

Dla dowolnych dwóch liczb a i b prawdziwa jest równość: $a+b=b+a$

Na przykład: W działaniu 7 + 11 można zamienić miejscami liczby, a otrzymany wynik będzie taki sam: 7 + 11 = 11 + 7 (wynikiem obu działań jest 18).

Prawo przemienności mnożenia:

Dla dowolnych dwóch liczb a i b prawdziwa jest równość: $a\cdot b=b\cdot a$

Na przykład: W działaniu 5 · 8 można zamienić miejscami liczby, a otrzymany wynik będzie taki sam: 5 · 8 = 5 · 8 (wynikiem obu działań jest 40).

Pozostałe działania nie są przemienne. Przykładowo działanie potęgowania nie jest przemienne, bo $3^2 \neq 2^3$ $(9 \neq 8)$.

Prawo łączności: Prawo pozwalające na wykonanie działania, złożonego z kilku takich samych działań, w dowolnej kolejności. Prawo jest prawdziwe dla działania dodawania i mnożenia.

Prawo łączności dodawania:

Dla dowolnych trzech liczb a, b i c prawdziwa jest równość: $\boxed{a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)}$

Na przykład: Działanie 5 + 7 + 9 można wykonać „od lewej do prawej", czyli zgodnie z kolejnością wykonywania działań: (5 + 7) + 9 = 12 + 9 = 21. Można też wykonać „od prawej do lewej", czyli: 5 + (7 + 9) = 5 + 16 = 21.

Prawo łączności mnożenia:

Dla dowolnych trzech liczb a, b i c prawdziwa jest równość: $\boxed{a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)}$

Na przykład: Działanie 2 · 4 · 6 można wykonać „od lewej do prawej", czyli zgodnie z kolejnością wykonywania działań: (2 · 4) · 6 = 8 · 6 = 48. Można też wykonać „od prawej do lewej", czyli: 2 · (4 · 6) = 2 · 24= 48.

Pozostałe działania nie są przemienne. Przykładowo działanie odejmowania nie jest przemienne, bo: 14 – 6 – 3 powinno być wykonywane jako (14 – 6) – 3 = 8 – 3 = 5. Jeśli zmienić kolejność i wykonać to działanie „od prawej do lewej" wynik byłby niepoprawny: 14 – (6 – 3) = 14 – 3 = 11.

Prawo rozdzielności: Z prawem rozdzielności mamy do czynienia często w sytuacji, gdy działanie składa się z dwóch działań elementarnych, z których jedno („słabsze") znajduje się w nawiasie natomiast drugie („silniejsze") znajduje się poza nawiasem. Wówczas wykonujemy działanie „silniejsze" nad każdym z elementów działania w nawiasie.

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

Dla dowolnych trzech liczb a, b i c prawdziwa jest równość: $\boxed{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$

Na przykład: Działanie 3 · (2 + 6) powinno się wykonywać zgodnie z kolejnością działań jako: 3 · (2 + 6) = 3 · 8 = 24. Jednak można również wykonać je stosując prawo rozdzielności: 3 · (2 + 6) = 3 · 2 + 3 · 6 = 6 + 18 = 24. Wynik jest ten sam.

Prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania:

Dla dowolnych trzech liczb a, b i c prawdziwa jest równość: $\boxed{a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c}$

Na przykład: Działanie 5 · (7 – 3) powinno się wykonywać zgodnie z kolejnością działań jako: 5 · (7 – 3) = 5 · 4 = 20. Jednak można je również wykonać stosując prawo rozdzielności: 5 · (7 – 3) = 5 · 7 – 5 · 3 = 35 – 15 = 20. Wynik jest ten sam.

Prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania (prawostronne):

Dla dowolnych trzech liczb a, b i c (c różne od 0) prawdziwa jest równość: $\boxed{(a+b):c=a:c+b:c}$ lub $\boxed{\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}$

Przykład: Zgodnie z kolejnością działań: (10 + 6) : 2 = 16 : 2 = 8.
Stosując prawo rozdzielności: (10 + 6) : 2 = 10 : 2 + 6 : 2 = 5 + 3 = 8.

Prawo rozdzielności dzielenia względem odejmowania (prawostronne):

Dla dowolnych trzech liczb a, b i c (różne od 0) prawdziwa jest równość: $\boxed{(a-b):c=a:c-b:c}$ lub $\boxed{\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}}$

Przykład: Zgodnie z kolejnością działań: (18 – 6) : 3 = 12 : 3 = 4.
Stosując prawo rozdzielności: (18 – 6) : 3 = 18 : 3 – 6 : 3 = 6 – 2 = 4.

UWAGA! Lewostronne prawa rozdzielności dzielenia względem dodawania i odejmowania nie są prawdziwe!!! Czyli:

$a:(b+c)\neq a:b+a:c$ oraz $a:(b-c)\neq a:b-a:c$.

Prawo rozdzielności potęgowania względem mnożenia (prawostronne):

Dla dowolnych dwóch liczb a i b oraz liczby naturalnej n prawdziwa jest równość: $\boxed{(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n}$

Przykład: Zgodnie z kolejnością działań: $(2\cdot 3)^2 = 6^2 = 36$
Stosując prawo rozdzielności: $(2\cdot 3)^2 = 2^2\cdot 3^2 = 4\cdot 9 = 36$.

Prawo rozdzielności potęgowania względem dzielenia (prawostronne):

Dla dowolnych dwóch liczb a i b (liczba b różna od zera) oraz liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$\boxed{(a:b)^n = a^n : b^n} \quad \text{lub} \quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Przykład: Zgodnie z kolejnością działań: $(10:2)^2 = 5^2 = 25$
Stosując prawo rozdzielności: $(10:2)^2 = 10^2 : 2^2 = 100 : 4 = 25$.

UWAGA! Lewostronne prawa rozdzielności potęgowania względem mnożenia i dzielenia nie są prawdziwe!!! Czyli:

$$a^{(n\cdot k)} \neq a^n \cdot a^k \quad \text{oraz} \quad a^{\frac{n}{k}} \neq \frac{a^n}{b^k}.$$

Prawo rozdzielności pierwiastkowania względem mnożenia (prawostronne):

Dla dowolnych dwóch liczb nieujemnych a i b oraz liczby naturalnej n prawdziwa jest równość: $\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$

Przykład: Zgodnie z kolejnością działań: $\sqrt{4\cdot 16} = \sqrt{64} = 8$

Stosując prawo rozdzielności: $\sqrt{4\cdot 16} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{16} = 2\cdot 4 = 8$

Prawo rozdzielności pierwiastkowania względem dzielenia (prawostronne):

Dla dowolnych dwóch liczb nieujemnych a i b (liczba b różna od zera) oraz liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$\boxed{\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}} \quad \text{lub} \quad \boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Przykład: Zgodnie z kolejnością działań: $\sqrt[3]{216:8} = \sqrt[3]{27} = 3$

Stosując prawo rozdzielności: $\sqrt[3]{216:8} = \sqrt[3]{216} : \sqrt[3]{8} = 6:2 = 3$

---

5. Porządkowanie jednomianów. Mnożenie jednomianów.

Jednomian w postaci uporządkowanej powinien wyglądać w następujący sposób:

$$\boxed{-8a^2bx^4}$$

Znak jednomianu

Współczynnik liczbowy jednomianu

Czynniki literowe jednomianu i ich stopnie

Ustawienie poszczególnych czynników podlega następującym zasadom:

– Jeśli w jednomianie występuje znak „–", to powinien znajdować się na początku jednomianu. W jednomianie uporządkowanym znak „–" może wystąpić tylko jeden raz.

  ŹLE: $\boxed{3(-x)}$ DOBRZE: $\boxed{-3x}$

– W jednomianie może występować tylko jeden współczynnik liczbowy. Miejsce współczynnika liczbowego w jednomianie uporządkowanym znajduje się na początku (ewentualnie wraz ze znakiem „–"). W przypadku, gdy w jednomianie występuje kilka współczynników liczbowych należy je pomnożyć przez siebie.

  ŹLE: $\boxed{x(-2y)\cdot 3}$ DOBRZE: $\boxed{-6xy}$

– W jednomianie uporządkowanym czynnik literowy nie może się powtórzyć. W sytuacji, gdy pewien czynnik literowy powtarza się, należy iloczyn tych czynników zastąpić potęgowaniem.

  ŹLE: $\boxed{5ac^3a^2c^4}$ DOBRZE: $\boxed{5a^3c^7}$

– W jednomianie uporządkowanym czynniki literowe powinny być ułożone alfabetycznie.

ŹLE: $\boxed{3xca^2}$ DOBRZE: $\boxed{3a^2cx}$

– W jednomianie uporządkowanym nie powinny występować działania w nawiasach. Należy je zlikwidować stosując odpowiednie prawa.

ŹLE: $\boxed{2(xy^2)^3}$ DOBRZE: $\boxed{2x^3y^6}$

Przykład: Uporządkuj jednomian: $2c^2(-4ac)\cdot c^5$

W podanym przykładzie należy zastosować wszystkie zasady wypisane powyżej. Najpierw przesuwamy znak „–” do przodu. Następnie mnożymy współczynniki liczbowe (liczby 2 i 4). Kolejny krok to uporządkowanie alfabetyczne czynników literowych (najpierw a później c) oraz zastąpienie trzech czynników zawierających literę c, jednym wyrażeniem będącym potęgą liczby c..

$$2c^2(-4ac)\cdot c^5 = -8ac^8$$

Mnożenie jednomianów to działanie, które w efekcie sprowadza się do tych samych czynności, na jakich opierała się zasada porządkowania jednomianów.

Przykład: Pomnóż jednomiany $2x$, $-5y^2$, $\frac{1}{4}xy$

Zapisujemy działanie mnożenia uzyskując w ten sposób wynik w postaci nieuporządkowanego jednomianu. Następnie wykonujemy czynności zgodne z zasadą porządkowania jednomianów:

$$2x\cdot(-5y^2)\cdot\frac{1}{4}xy = -\frac{5}{2}x^2y^3$$

---

6. Redukcja wyrazów podobnych sumy algebraicznej.

Suma algebraiczna to wyrażenie algebraiczne w postaci sumy jednomianów. Każdy jednomian sumy algebraicznej nazywamy **wyrazem.**.

$$\boxed{2a^2 + 6ab - 7b^3 + 10}$$

wyraz wyraz wyraz wyraz

Powyżej zapisano wyrażenie algebraiczne złożone z czterech wyrazów:

$2a^2$ – pierwszy wyraz sumy algebraicznej,

$6ab$ – drugi wyraz sumy algebraicznej,

$-7b^3$ – trzeci wyraz sumy algebraicznej (współczynnik liczbowy jest ujemny i dlatego w sumie algebraicznej pojawia się działanie odejmowania),

10 – czwarty wyraz sumy algebraicznej,

Wyrazy podobne sumy algebraicznej. Wyrazami podobnymi sumy algebraicznej nazywamy te wyrazy, które nie różnią się czynnikami literowymi ani ich stopniem (potęgami). Mogą różnić się współczynnikami liczbowymi i ich znakiem.

Wyrazami podobnymi w sumie algebraicznej zapisanej poniżej są $3x^2$ i $4x^2$ oraz para $5xy$ i $-6xy$. Wyrazy podobne podkreślamy w podobny sposób.

$$\boxed{\underline{3x^2} + 5xy - 7x + \underline{4x^2} - 6xy + 1}$$

wyrazy podobne wyrazy podobne

Redukcja wyrazów podobnych. Wyrazy podobne sumy algebraicznej można dodawać lub odejmować. Działanie wykonuje się tylko na współczynnikach liczbowych (czynniki literowe zostają niezmienione).

W przykładzie zapisanym powyżej, w wyniku redukcji wyrazów podobnych otrzymamy:

$$3x^2+5xy-7x+4x^2-6xy+1=7x^2-xy-7x+1$$

Ponieważ w wyniku redukcji wyrazów *5xy* i *–6xy* otrzymany wynik wynosi *–1xy,* można go zapisać w skrócie *jako – xy* (współczynnika liczbowego równego *1* nie musimy zapisywać przed jednomianem).

Może zdarzyć się sytuacja, że wyrazy podobne wzajemnie redukują się do zera. Podczas wykonywania redukcji wyrazów podobnych można je symbolicznie skreślić, a w wyniku nie zapisujemy liczby 0, chyba, że zredukowany wielomian nie posiada ani jednego wyrazu. Przykład:

$$\cancel{3a}-6ab-\cancel{7a}+4ab+\cancel{4a}+b+ab=-ab+b$$

---

7. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych.

Działanie dodawania i odejmowania sum algebraicznych jest związane z umiejętnością usuwania nawiasów. Zasada usuwania nawiasów mówi, że:

– Jeśli, wykonując dodawanie lub odejmowanie sum algebraicznych, w działaniu napotkamy nawias, przed którym nie ma żadnego znaku działania (nawias rozpoczyna wyrażenie algebraiczne), to nawias ten można zlikwidować nie dokonując żadnych zmian w wyrazach sumy znajdującej się w nawiasie.

– Jeśli, wykonując dodawanie lub odejmowanie sum algebraicznych, w działaniu napotkamy nawias, przed którym znajduje się znak dodawania „+”, to nawias ten można zlikwidować nie dokonując żadnych zmian w wyrazach sumy znajdującej się w nawiasie.

– Jeśli, wykonując dodawanie lub odejmowanie sum algebraicznych, w działaniu napotkamy nawias, przed którym znajduje się znak „–”, to nawias ten można zlikwidować, ale wszystkie znaki „+” w sumie algebraicznej, która znajdowała się w nawiasie należy zmienić na znaki „–”, natomiast wszystkie znaki „–” w sumie algebraicznej, która znajdowała się w nawiasie należy zmienić na znaki „+”.

Przykład:

$$(2x-5y+7)+(7x+y-8)-(10x+2y-3)=2x-5y+7+7x+y-8-10x-2y+3=-x-6y+2$$

znaki nie zmieniły się

znaki nie zmieniły się

znaki zmieniły się na przeciwne

Przykład:

$$-(a+5)+(-3a+2)-(-4a-7)=-a-5-3a+2+4a+7=4$$

---

8. Mnożenie jednomianów i sum algebraicznych.

Aby pomnożyć jednomian i sumę algebraiczną należy wykonać działanie zgodnie z prawem rozdzielności mnożenia względem dodawania (lub odejmowania). Mnożąc poszczególne wyrazy korzystamy z zasad dotyczących porządkowania jednomianów.
Przykłady:

$$5(x+3)=5x+15$$

$$-7x\left(x^2+3y-2\right)=-7x^3-21xy+14x$$

$$\left(4a-6a^2b\right)\cdot 2a^2b=8a^3b-12a^4b^2$$

---

9. Dzielenie sumy algebraicznej przez jednomian.

Aby podzielić sumę algebraiczną przez jednomian należy wykonać działanie zgodnie z prawem rozdzielności dzielenia względem dodawania lub odejmowania. Dzieląc poszczególne wyrazy wykonujemy działanie osobno na współczynnikach liczbowych, osobno na czynnikach literowych.

Przykłady:

$$(8x+20):4=2x+5$$

$$\frac{24xy+18x^2}{3x}=8y+6x$$

$$\frac{20a^4+5a^2}{-5a^2}=-4a^2-1$$

UWAGA! Gdy dzielenie jest zapisane w postaci kreski ułamkowej, **NIE WOLNO** skracać!

---

10. Mnożenie dwóch sum algebraicznych.

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne przez siebie, należy skorzystać z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania i odejmowania i pomnożyć każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy algebraicznej. Mnożąc poszczególne wyrazy korzystamy z zasad dotyczących porządkowania jednomianów. Po wykonaniu mnożenia warto zredukować wyrazy podobne.

Przykłady:

$$(2x+5)(x-4)=2x^2\underline{-8x}+\underline{5x}-20=2x^2-3x-20$$

$$(a+3)(a^2-3a+9)=a^3-\cancel{3a^2}+\cancel{9a}+\cancel{3a^2}-\cancel{9a}+27=a^3+27$$

---

11. Potęgowanie i pierwiastkowanie jednomianów.

Aby podnieść do potęgi jednomian, należy skorzystać z prawa rozdzielności potęgowania względem mnożenia, to znaczy podnieść do potęgi każdy z czynników jednomianu z osobna.

Przykład:

$$\left(4x^2y\right)^3 = 64x^6y^3$$

Pierwiastkując jednomian należy pierwiastkować osobno każdy z czynników jednomianu zgodnie z prawem rozdzielności, pamiętając też o odpowiednich prawach dotyczących potęgowania i pierwiastkowania.

Przykład:

$$\sqrt{9x^2y^6} = 3xy^3$$

---

12. Potęgowanie sum algebraicznych.

Aby podnieść do potęgi sumę algebraiczną, należy zamienić potęgowanie na mnożenie (zgodnie z definicją potęgi o wykładniku naturalnym).

Przykłady:

$$(2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3) = 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(a-2)^2 = (a-2)(a-2) = a^2 - 2a - 2a + 4 = a^2 - 4a + 4$$

Wzory skróconego mnożenia.

Aby uprościć potęgowanie sum algebraicznych można zastosować wzory skróconego mnożenia:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - wzór na kwadrat sumy.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ - wzór na kwadrat różnicy.

W zastosowaniu jest jeszcze jeden wzór upraszczający mnożenie:

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ - wzór na iloczyn różnicy i sumy tych samych wyrażeń.

Inne wzory skróconego mnożenia stosowane w nauczaniu matematyki w szkole średniej:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ - wzór na sześcian sumy.

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ - wzór na sześcian różnicy.

---

13. Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias to czynność odwrotna do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

Aby z sumy algebraicznej wyłączyć możliwie najlepszy wspólny czynnik przed nawias, należy wykonać czynności:

– znajdujemy największy wspólny dzielnik wszystkich współczynników liczbowych występujących w sumie algebraicznej. Np. w sumie algebraicznej $12x^2 + 24xy - 30x$ współczynniki liczbowe to: *12, 24* i *–30*. Największym wspólnym dzielnikiem tych liczb jest liczba *6*.
– sprawdzamy, czy we wszystkich wyrazach sumy algebraicznej znajduje się taki sam czynnik literowy. Np. w sumie algebraicznej $12x^2 + 24xy - 30x$ takim czynnikiem jest *x* (znajduje się w każdym z wyrazów).
– tworzymy jednomian, który zostanie wyłączony przed nawias z wspólnego dzielnika i wspólnych czynników literowych. Np. w sumie algebraicznej $12x^2 + 24xy - 30x$ przed nawias zostanie wyłączony jednomian *6x.*
– Zapisujemy wynik, jako iloczyn wybranego jednomianu oraz sumy algebraicznej, która jest wynikiem dzielenia wyjściowej sumy przez ten jednomian. Np. suma algebraiczna $12x^2 + 24xy - 30x$ po wyłączeniu wspólnego czynnika przed nawias przyjmie postać iloczynową: $6x(2x + 4y - 5)$.

Przykłady:

$$28a^2b + 63ab^2 = 7ab(4a + 9b)$$

$$40x^2y^3 - 80x^3y + 50x^2y^2 = 10x^2y(4y^2 - 8x + 5y)$$

Łatwo sprawdzić, że wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias to czynność odwrotna do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną:

Mnożenie jednomianu przez sumę

$$5xy(4x + 9y - 2) = 20x^2y + 45xy^2 - 10xy$$

Wyłączanie czynnika przed nawias

---

14. Równania. Metoda rozwiązywania równań.

Pojęcia związane z równaniami:

Równaniem nazywamy dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem równości „=”.

$$\underbrace{3x - 5}_{\text{Lewa strona}} \underset{\text{Znak równości}}{=} \underbrace{1 - (8 - x)}_{\text{Prawa strona}}$$

Niewiadoma

Niewiadoma. Każdą liczbę w równaniu ukrytą pod symbolem literowym nazywamy niewiadomą.

Rozwiązanie równania. Rozwiązaniem równania nazywamy taką liczbę (lub liczby), które spełniają to równanie, to znaczy powodują, że lewa strona równania przyjmuje taką samą wartość co prawa strona równania.

Np. rozwiązaniem równania $3x - 2 = 10$ jest liczba x = 4, gdyż wstawiona w miejsce niewiadomej spełnia to równanie.

Sprawdzenie:

$3 \cdot 4 - 2 = 10$

$12 - 2 = 10$

$10 = 10$

$L = P$

Pierwiastek równania. Pierwiastek równania, to inna nazwa liczby będącej rozwiązaniem tego równania.

Rozwiązywanie równania. Rozwiązywanie równania to proces, który ma na celu znalezienie rozwiązania równania. W rozwiązywaniu równania należy posłużyć się odpowiednią metodą rozwiązywania.

Równania równoważne. Dwa równania (lub więcej) uznajemy za równoważne, jeśli mają takie samo rozwiązanie (lub zbiór rozwiązań).

Np. Równania równoważne to: $\boxed{3x-2=10}$ i $\boxed{x-3=2(x+1)-9}$, bo rozwianiem obu równań jest liczba x = 4.

Rodzaje równań:

Podział równań ze względu na ilość niewiadomych. W zależności od ilości niewiadomych równania dzielimy na:

- równania z jedną niewiadomą. Np.: $5(x-1)+4=2x$, $a^3+4a=7$, $2^x=16$ itd…
- równania z dwoma niewiadomymi. Np.: $3x+5y=2$, $\dfrac{x-3}{y^2+1}=x+y$, $s+3t=8$ itd…
- równania z trzema niewiadomymi. Np.: $6x+2y-z=4$ itd…
- równania z wieloma niewiadomymi.

Podział równań ze względu na rodzaj „najsilniejszych" działań występujących w równaniu. W zależności od rodzaju „najsilniejszego" działania w równaniu równania dzielimy na:

- równania pierwszego stopnia, czyli równania liniowe (zawierają tylko podstawowe działania – mnożenie, dodawanie, odejmowanie). Np.: $2(x-5)+4=7x+2$, $8x+3y=7$ itd…,
- równania drugiego stopnia, czyli równania kwadratowe (z niewiadomą podnoszoną do kwadratu). Np.: $x^2+6x-7=0$, $x+3y^2=8$ itd…,
- równania trzeciego stopnia (z niewiadomą podnoszoną do potęgi trzeciej). Np.: $x^3+6x^2-8x+4=0$ itd…,
- równania wyższych stopni.
- równania wymierne (główne działanie to dzielenie). Np.: $\dfrac{x-7}{x^2+3x-2}=0$,
- równania wykładnicze (niewiadoma „ukryta" w wykładniku potęgi). Np.: $4^x+2^x=20$,
- równania trygonometryczne (niewiadoma „uwikłana" w funkcje trygonometryczne). Np.: $\sin^2 x+\cos x=1$,
- inne równania.

Rozwiązywanie równań:

Metoda równań równoważnych. Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą rozwiązuje się metodą równań równoważnych. Poszczególne etapy metody zostaną opisane na przykładzie zadania:

Przykład: *Rozwiąż równanie metodą równań równoważnych:*

$$\boxed{5(x-2)+6(x+1)=7(x+2)-(7-2x)+1}$$

Etap 1. **Doprowadzenie stron równania do najprostszej postaci.** Ponieważ strona lewa i strona prawa równania to wyrażenia algebraiczne można doprowadzić je do prostszej postaci posługując się odpowiednimi prawami działań na wyrażeniach algebraicznych. W efekcie otrzymamy prostsze równanie równoważne pierwszemu. W równaniu, które należy rozwiązać w tym przykładzie można wykonać mnożenia, usunąć nawiasy i zredukować wyrazy podobne:

$$\begin{array}{l}
5(x-2)+6(x+1)=7(x+2)-(7-2x)+1\\
5x-10+6x+6=7x+14-7+2x+1\\
11x-4=9x+8
\end{array}$$

Etap 2. Można udowodnić, że gdy dodamy do obu stron równania jakąś liczbę lub wyrażenie, to otrzymamy równanie równoważne danemu. Podobnie gdyby odjąć od obu stron równania jakąś liczbę lub wyrażenie, to otrzymamy równanie równoważne danemu. Można to spostrzeżenie wykorzystać, by na tym etapie rozwiązywania **przenieść niektóre wyrazy z lewej strony równania na prawą lub z prawej strony równania na lewą**. Podczas przenoszenia wyrazów ulega zmianie znak tego wyrazu. Przyjmuje się zasadę, że wyrazy zawierające niewiadomą powinny zostać przeniesione na stronę lewą równania, a wyrazy wolne („samotne" liczby) przenosi się na stronę prawą. Zasada ta nie zawsze musi być przestrzegana. Fakt przenoszenia wyrazów zapisujemy obok równania odkreślając działanie pionową kreską. Po przeniesieniu wyrazów można wykonać redukcję wyrazów podobnych.

$$\begin{array}{ll}
11x-4=9x+8 & \big| +4-9x\\
11x-9x=8+4 & \\
2x=12 &
\end{array}$$

Etap 3. W tym momencie równanie ma już bardzo prostą postać i znalezienie wartości niewiadomej nie powinno stanowić większego problemu. Do tego celu można też wykorzystać spostrzeżenie, że gdy pomnożymy obie strony równania przez jakąś liczbę (różną od zera), to otrzymamy równanie równoważne danemu. Podobnie gdyby podzielić obie strony równania przez jakąś liczbę (różną od zera), to otrzymamy równanie równoważne danemu. Można ten fakt wykorzystać, by na tym etapie rozwiązywania pozbyć się współczynnika, który znajduje się przy niewiadomej. W tym celu **dzielimy obie strony równania przez ten współczynnik**. Fakt dzielenia zapisujemy obok równania odkreślając działanie pionową kreską.

$$\begin{array}{ll} 2x = 12 & \vert :2 \\ x = 6 & \end{array}$$

Równanie zostało rozwiązane. Rozwianiem równania (pierwiastkiem równania) jest liczba 6.

Etap końcowy. Sprawdzenie. Po rozwiązaniu równania warto wykonać sprawdzenie, czyli sprawdzić czy liczba x = 6 wstawiona w miejsce niewiadomej spełnia to równanie.

Spr.:

$$\begin{array}{l} 5(6-2)+6(6+1)=7(6+2)-(7-2\cdot 6)+1 \\ 5\cdot 4+6\cdot 7=7\cdot 8-(7-12)+1 \\ 20+42=56-(-5)+1 \\ 62=62 \\ L=P \end{array}$$

Przykład: *Rozwiąż równanie metodą równań równoważnych:*

$$\frac{x-3}{2}+\frac{2x}{3}=\frac{1}{6}(x+9)$$

Równanie, które należy rozwiązać zawiera kilka wyrażeń w postaci ułamka. Istnieje sposób, który pozwala na zlikwidowanie wszystkich ułamków (zwykłych lub dziesiętnych) w równaniu. W tym celu należy **pomnożyć obie strony równania przez wspólny mianownik** wszystkich ułamków. Mnożenie takie wykonujemy mnożąc każdy wyraz w tym równaniu.

$$\begin{array}{ll} \overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{x-3}{{}_1\cancel{2}}+\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{2x}{{}_1\cancel{3}}=\overset{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{{}_1\cancel{6}}(x+9) & \vert \cdot 6 \\ 3(x-3)+2\cdot 2x=x+9 & \end{array}$$

Teraz wykonujemy kolejne czynności opisane w etapach pierwszym, drugim i trzecim.

$$\begin{array}{ll} 3(x-3)+2\cdot 2x=x+9 & \\ 3x-9+4x=x+9 & \\ 7x-9=x+9 & \vert +9-x \\ 6x=18 & \vert :6 \\ x=3 & \end{array}$$

Przykład: *Rozwiąż równanie metodą równań równoważnych:*

$$0{,}8x+0{,}2(0{,}5x+3)=1{,}2x+2{,}7$$

W równaniu, które należy rozwiązać występuje sporo ułamków dziesiętnych. Można je zlikwidować mnożąc strony przez liczbę 10, 100, 1000 itd… w zależności od rodzaju ułamków dziesiętnych występujących w równaniu. Warto wcześniej wykonać działania, które powodują obecność w równaniu symboli nawiasów. W przykładzie powyżej wykonujemy mnożenie.

$$0{,}8x+0{,}1x+0{,}6=1{,}2x+2{,}7$$

Po zlikwidowaniu nawiasu można pomnożyć strony równania przez 10, by pozbyć się liczb w postaci ułamka dziesiętnego.

$$\begin{array}{ll} 0{,}8x+0{,}1x+0{,}6=1{,}2x+2{,}7 & \vert \cdot 10 \\ 8x+x+6=12x+27 & \end{array}$$

Teraz rozwiązujemy równanie zgodnie z opisanymi wcześniej etapami.

$$\begin{aligned}
&8x + x + 6 = 12x + 27 \\
&9x + 6 = 12x + 27 && \Big| -6 - 12x \\
&-3x = 12 && \Big| :(-12) \\
&x = -4
\end{aligned}$$

<u>Równania sprzeczne i tożsamościowe.</u>

Równanie sprzeczne. Równaniem sprzecznym nazywamy równanie, które nie ma rozwiązania (żadna liczba nie spełnia tego równania).

Przykład:

$$\begin{aligned}
&3(x-1) + 2 = 2x - (5 - x) \\
&3x - 3 + 2 = 2x - 5 + x \\
&3x - 1 = 3x - 5 \\
&3x - 3x = -5 + 1 \\
&0 = -4
\end{aligned}$$

SPRZECZNOŚĆ (RÓWNANIE SPRZECZNE)

Równanie musimy uznać za sprzeczne, gdyż w efekcie rozwiązywania go metodą równań równoważnych otrzymaliśmy równość zawsze fałszywą.

Równanie tożsamościowe. Równaniem tożsamościowym nazywamy równanie, którego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista (wszystkie liczby spełniają to równanie).

Przykład:

$$\begin{aligned}
&4(x-3) + (x+1) = (3x - 10) - (1 - 2x) \\
&4x - 12 + x + 1 = 3x - 10 - 1 + 2x \\
&5x - 11 = 5x - 11 && \Big| +11 - 5x \\
&5x - 5x = -11 + 11 \\
&0 = 0
\end{aligned}$$

TOŻSAMOŚĆ (RÓWNANIE TOŻSAMOŚCIOWE)

Równanie musimy uznać za tożsamościowe, gdyż w efekcie rozwiązywania go metodą równań równoważnych otrzymaliśmy równość zawsze prawdziwą.

<u>Równania w postaci proporcji:</u>

Proporcja. Proporcją nazywamy równość dwóch stosunków. Proporcja jest równaniem w postaci:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Wyrażenia „ukryte” pod symbolami a i d nazywamy **wyrazami skrajnymi**.
Wyrażenia „ukryte” pod symbolami b i c nazywamy **wyrazami środkowymi**.

Twierdzenie o wyrazach proporcji: W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych. Czyli:

$$ad = bc$$

Twierdzenie to wykorzystuje się przy rozwiązywaniu równań w postaci proporcji.

Przykład: *Rozwiąż proporcję:*

$$\frac{x+3}{x}=\frac{x-5}{x-6}$$

Korzystamy z twierdzenia o wyrazach proporcji i otrzymujemy równanie, które rozwiązujemy zgodnie z metodą równań równoważnych.

$$\begin{aligned}
&\frac{x+3}{x}=\frac{x-5}{x-6} \\
&(x+3)(x-6)=x(x-5) \\
&x^2-6x+3x-18=x^2-5x \\
&x^2-3x-18=x^2-5x && \Big|+18+5x-x^2 \\
&2x=18 && \Big|:2 \\
&x=9
\end{aligned}$$

Podczas rozwiązywania zadań tekstowych z użyciem proporcji najczęściej zapisuje się informacje o wielkościach proporcjonalnych za pomocą tabeli. Stosuje się wówczas zmodyfikowaną wersję twierdzenia o wyrazach proporcji, które można zapisać symbolicznie:

Jeżeli $\frac{x}{b}=\frac{c}{d}$, to $x=\frac{b\cdot c}{d}$. W postaci tabeli informacji: Jeśli $\begin{array}{l} x \text{ ——— } c \\ b \text{ ——— } d \end{array}$, to $x=\frac{b\cdot c}{d}$

Analogicznie można zapisać to twierdzenie jeszcze w kilku postaciach:

Jeżeli $\frac{a}{x}=\frac{c}{d}$, to $x=\frac{a\cdot d}{c}$. W postaci tabeli informacji: Jeśli $\begin{array}{l} a \text{ ——— } c \\ x \text{ ——— } d \end{array}$, to $x=\frac{a\cdot d}{c}$

Jeżeli $\frac{a}{b}=\frac{x}{d}$, to $x=\frac{a\cdot d}{b}$. W postaci tabeli informacji: Jeśli $\begin{array}{l} a \text{ ——— } x \\ b \text{ ——— } d \end{array}$, to $x=\frac{a\cdot d}{b}$

Jeżeli $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, to $x=\frac{b\cdot c}{a}$. W postaci tabeli informacji: Jeśli $\begin{array}{l} a \text{ ——— } c \\ b \text{ ——— } x \end{array}$, to $x=\frac{b\cdot c}{a}$

Najczęściej tą metodę wykorzystuje się w zadaniach dotyczących obliczeń procentowych:

Przykład:

Rozwiąż zadanie: „W wyborach do samorządu na Janka oddano 54 głosy, co stanowiło 30% wszystkich oddanych głosów. Oblicz, ile wszystkich głosów oddano w tych wyborach?”

Układamy odpowiednią tablicę informacji:

54 głosy ——————— 30% głosów
x ——————— 100% głosów

Stosujemy odpowiednie działanie wynikające z twierdzenia o wyrazach proporcji:

$$x=\frac{54\cdot 100\%}{30\%}=180$$

Odpowiedź: W wyborach oddano 180 głosów.

15. Nierówności. Rozwiązywanie nierówności.

Nierównością nazywamy dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem nierówności.

Dwa znaki nierówności:

$>$ – znak większości

$<$ – znak mniejszości

Znaki łączące nierówność i równanie:

$\geq$ – znak „większe lub równe”

$\leq$ – znak „mniejsze lub równe”

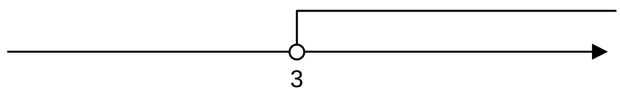
Rozwiązanie nierówności. Rozwiązaniem nierówności nazywamy zbiór takich liczb, które spełniają tą nierówność, to znaczy powodują, że lewa strona nierówności ma większą wartość (mniejszą wartość) niż prawa strona nierówności. Przeważnie rozwiązaniem nierówności zbiór nieskończony, który jest podzbiorem liczb rzeczywistych zwanym **przedziałem**.

Np.: Rozwiązaniem nierówności $x > 3$ jest zbiór wszystkich liczb większych od 3.

Rozwiązaniem nierówności $x < -6$ jest zbiór wszystkich liczb mniejszych od –6.

Rozwiązanie nierówności można zaprezentować graficznie, rysując odpowiedni przedział na osi liczbowej, oraz za pomocą przedziału liczbowego (stosując odpowiedni zapis symboliczny).

Np.: Rozwiązanie nierówności $x > 3$ prezentuje rysunek:

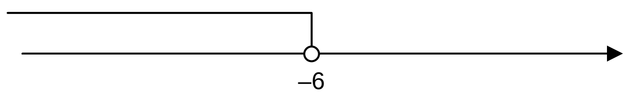


Symbol „pustego” kółeczka w miejscu, gdzie na osi liczbowej znajduje się liczba 3 oznacza, że liczba 3 nie jest rozwiązaniem tej nierówności. Rozwiązaniami są wszystkie liczby większe od 3, a więc na przykład:

$$3\frac{1}{10},\ 3\frac{1}{2},\ 3{,}8,\ 7,\ 1000,\ 920872\ \dots$$

Rozwiązanie tej nierówności zaprezentowane za pomocą przedziału: $x \in (3, \infty)$

Np.: Rozwiązanie nierówności $x < -6$ prezentuje rysunek:

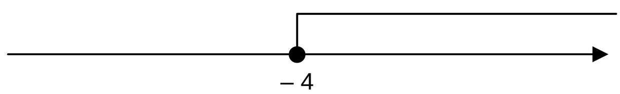


Symbol „pustego” kółeczka w miejscu, gdzie na osi liczbowej znajduje się liczba –6 oznacza, że liczba –6 nie jest rozwiązaniem tej nierówności. Rozwiązaniami są wszystkie liczby mniejsze od –6, a więc na przykład:

$$-6\frac{1}{100},\ -6\frac{1}{2},\ -6{,}9,\ -7,\ -100,\ -746\dots$$

Rozwiązanie tej nierówności zaprezentowane za pomocą przedziału: $x \in (-\infty, -6)$

Np.: Rozwiązanie nierówności $x \geq -4$ prezentuje rysunek:

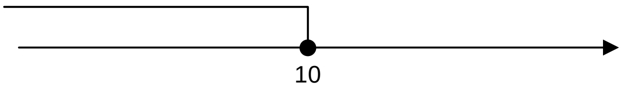


Symbol „zamalowanego” kółeczka w miejscu, gdzie na osi liczbowej znajduje się liczba –4 oznacza, że liczba –4 też jest rozwiązaniem tej nierówności. Rozwiązaniami są wszystkie liczby większe od –4 oraz liczba –4, a więc na przykład:

$$-4,\ \ -3\frac{9}{10},\ -3\frac{1}{2},\ -3{,}1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 64,\ \ 1000,\ \ 87123\dots$$

Rozwiązanie tej nierówności zaprezentowane za pomocą przedziału: $x \in \langle -4, \infty)$

Np.: Rozwiązanie nierówności $x \le 10$ prezentuje rysunek:



Symbol „zamalowanego” kółeczka w miejscu, gdzie na osi liczbowej znajduje się liczba 10 oznacza, że liczba 10 też jest rozwiązaniem tej nierówności. Rozwiązaniami są wszystkie liczby mniejsze od 10 oraz liczba 10, a więc na przykład:

$$10,\quad 9\frac{99}{100},\quad 9\frac{3}{4},\quad 9,\quad 7,\quad 2,\quad 0,\quad -1,\quad -9334\ldots$$

Rozwiązanie tej nierówności zaprezentowane za pomocą przedziału: $x \in \left(-\infty, 10\right\rangle$

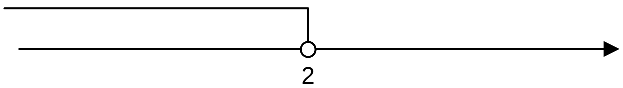
Metoda rozwiązywania nierówności:

Metoda rozwiązywania nierówności liniowych z jedną niewiadomą jest bardzo podobna do metody równań równoważnych. Rozwiązywanie przebiega w identyczny sposób. Kolejne etapy:
Etap 1: Doprowadzamy obie strony nierówności do najprostszej postaci.
Etap 2: Przenosimy wyrazy zawierające niewiadomą na lewą stronę nierówności, a wyrazy wolne na prawą.
Etap 3: Dzielimy strony nierówności przez współczynnik przy niewiadomej.

UWAGA!!! Dzieląc lub mnożąc strony nierówności przez liczbę ujemną należy zmienić znak nierówności na przeciwny! Znak większości zamieniamy na znak mniejszości. Znak mniejszości zamieniamy na znak większości. Znak „większe lub równe” zamieniamy na znak „mniejsze lub równe”. Znak „mniejsze lub równe” zamieniamy na znak „większe lub równe”.

Przykład:

$$\begin{aligned}
&3(x-2)+2(x+1) > (x-1)-(7-6x) \\
&3x-6+2x+2 > x-1-7+6x \\
&5x-4 > 7x-8 && \Big|\, +4-7x \\
&5x-7x > -8+4 \\
&-2x > -4 && \Big|\, :(-2) \\
&x < 2
\end{aligned}$$



$x \in (-\infty, 2)$

---

16. Przekształcanie wzorów.

Wzory to równania, za pomocą których przedstawiony jest sposób obliczania danej wielkości (np. pola, obwodu figury, przyspieszenia ciała, siły, prędkości, natężenia prądu, masy molowej itd…). Istnieją wzory matematyczne, fizyczne oraz inne, które można spotkać również w pozostałych naukach ścisłych. Większość wzorów ma postać równania, w którym lewą stronę stanowi jedynie symbol literowy określający prezentowaną wzorem wielkość, natomiast strona prawa to działanie, w którym pojawiają się liczby stałe oraz zmienne (miejsca „do wstawiania” odpowiednich danych liczbowych).
Przekształcenie wzoru, to szereg czynności, które powodują, że z lewej strony znika symbol literowy określający prezentowaną wzorem wielkość, a w jego miejsce pojawi się litera, którą mamy wyznaczyć, a która wcześniej znajdowała się ze strony prawej wzoru. Wówczas wzór zmienia również swą nazwę i przeznaczenie.

Przekształcając wzór wykonujemy te same czynności, które obowiązywały podczas rozwiązywania równań, przy czym wyznaczany parametr traktujemy tak, jakby była to liczba niewiadoma:

- Jeśli prawa strona wzoru zawiera wyrażenie zapisane za pomocą kreski ułamkowej, „pozbywamy” się ułamka, mnożąc wzór przez mianownik (może być to symbol literowy lub nawet całe wyrażenie algebraiczne). Jeśli we wzorze występuje kilka ułamków, strony wzoru mnożymy przez wspólny mianownik (lub przez iloczyn wszystkich mianowników).
- Wykonujemy wszystkie działania, które można wykonać w ramach prawej strony wzoru.
- Przenosimy ze zmienionym znakiem na lewą stronę wyrazy zawierające niewiadomą (wyznaczany parametr), a pozostałe wyrazy na stronę prawą. Można w tym miejscu ułatwić sobie pracę zamieniając strony wzoru.
- W sytuacji, gdy niewiadoma (wyznaczany parametr) występuje w kilku wyrazach wyłączamy ją przed nawias jako wspólny czynnik.
- Dzielimy strony wzoru przez współczynnik przy niewiadomej (wyznaczanym parametrze). Czasami współczynnikiem tym jest całe wyrażenie algebraiczne zamknięte w nawias.

Przykład: Wzór na pole trapezu przekształć tak, aby wyznaczyć z niego podstawę *a.*

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Traktujemy literę *a* jak niewiadomą. Mamy wykonać czynności, które spowodują, że z lewej strony wzoru w miejsce litery *P* zostanie przeniesiony parametr *a.*
Ponieważ wzór zawiera wyrażenie w postaci ułamka, zgodnie z zasadą rozpoczynamy od pomnożenia stron wzoru przez mianownik:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad \Big| \cdot 2$$
$$2P = (a+b) \cdot h$$

Z prawej strony można wykonać działanie mnożenia:

$$2P = ah + bh$$

Dla ułatwienia zamieniamy strony wzoru:

$$ah + bh = 2P$$

Przenosimy wyraz *bh* na drugą stronę (z przeciwnym znakiem):

$$ah + bh = 2P \quad \Big| - bh$$
$$ah = 2p - bh$$

Na koniec dzielimy strony wzoru przez *h*:

$$ah = 2P - bh \quad \Big| : h$$
$$a = \frac{2p - bh}{h}$$

Wzór, który otrzymaliśmy nie jest już wzorem na pole trapezu, lecz wzorem na długość jednej z podstaw trapezu.

Przykład: Wzór na opór zastępczy przekształć tak, by wyznaczyć opór R_1.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Traktujemy symbol R_1 jak niewiadomą. Mamy wykonać czynności, które spowodują, że z lewą stronę wzoru będzie stanowić tylko parametr R_1.
Ponieważ wzór zawiera wyrażenia w postaci ułamków, zgodnie z zasadą, rozpoczynamy od pomnożenia stron wzoru przez trzy mianowniki:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Big| \cdot RR_1R_2$$
$$R_1R_2 = RR_2 + RR_1$$

Przenosimy wyraz RR_1 na drugą stronę (z przeciwnym znakiem):

$$R_1R_2 = RR_2 + RR_1 \quad \Big| - RR_1$$
$$R_1R_2 - RR_1 = RR_2$$

Ponieważ z lewej strony wzorów parametr R_1 występuje dwukrotnie, wyłączamy go przed nawias:

$$R_1(R_2 - R_1) = RR_2$$

Na koniec dzielimy strony wzoru przez wyrażenie znajdujące się w nawiasie:

$$R_1(R_2 - R_1) = RR_2 \qquad \big| : (R_2 - R_1)$$
$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R_1}$$

Wzór, który otrzymaliśmy nie jest już wzorem na opór *R,* lecz na opór R_1.

Większość wzorów wykorzystywanych podczas edukacji w gimnazjum ma bardzo prostą postać i jego przekształcenie nie wymaga zbyt wielu zabiegów.

Przykład: Przekształć wzór na prędkość tak, by otrzymać wzór na drogę w ruchu jednostajnym.

$$V = \frac{s}{t}$$

Wystarczy jedynie pomnożyć strony wzoru przez *t* i zamienić strony:

$$V = \frac{s}{t} \qquad \big| \cdot t$$
$$Vt = s$$
$$s = Vt$$

Wzór, który otrzymaliśmy jest już wzorem na drogę *s*.

---

17. Układy równań.

Układem równań nazywamy układ złożony z dwóch lub więcej równań połączonych symbolem klamry. Rozwiązaniem układu równań są takie liczby, które spełniają każde z równań układu.

Najprostszym układem równań jest układ dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi.

Układ równań liniowych z dwoma niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$$

Równanie x + 3y = 6 ma nieskończenie wiele rozwiązań. Każde z rozwiązań jest parą liczb spełniających to równanie, np.:

x = 0, y = 2,
x = 6, y = 0,
x = 3, y = 1
x = 9, y = –1,
x = 4,5, y = 0,5 itd…

Równanie 2x – 5y = 1 ma nieskończenie wiele rozwiązań. Każde z rozwiązań jest parą liczb spełniających to równanie, np.:

x = 0, y = – 0,2,
x = 3, y = 1,
x = 8, y = 3
x = –2, y = –1,
x = 0,5, y = 0 itd…

Wśród rozwiązań pierwszego równania i rozwiązań drugiego równania można odnaleźć wspólne rozwiązanie. Jest nim para liczb: x = 3, y = 1. Ta para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań i zapisujemy ją jako:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

<u>Rozwiązywanie układów równań. Metoda podstawiania.</u>

Metoda podstawiania jest metodą uniwersalną, to znaczy, że można nią rozwiązać większość układów równań, nawet te o znacznej trudności. Składa się z kilku etapów, które zostaną zaprezentowane na przykładzie:

Przykład: *Rozwiąż układ równań metodą podstawiania*:

$$\begin{cases} 7(x-1)+2(y+2)=x-y+9 \\ 4x-y=2 \end{cases}$$

Etap wstępny. Doprowadzenie każdego z równań układu do najprostszej postaci. Najprostsza postać równania liniowego z dwoma niewiadomymi *x* i *y*, to: *ax* + *by* = *c,* gdzie *a, b* i *c* to dowolne liczby rzeczywiste (*a* i *b* powinny być różne od zera). W powyższym przykładzie pierwsze równanie wymaga przekształcenia, natomiast drugie równanie jest zapisane w najprostszej postaci. W celu przekształcenia równania pierwszego wykonujemy odpowiednie działania i przenosimy wyrazy.

$$\begin{cases} 7(x-1)+2(y+2)=x-y+9 \\ 4x-y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x-7+2y+4=x-y+9 \\ 4x-y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+2y-3=x-y+9 & \big| -x+y+3 \\ 4x-y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+3x=12 \\ 4x-y=2 \end{cases}$$

Etap 1. Przygotowanie do podstawienia. Wybieramy jedno z równań. W wybranym równaniu wskazujemy jedną z niewiadomych i przekształcamy tak równanie, by niewiadoma wybrana przez nas pozostała samodzielnie po stronie lewej równania. Wybierając równanie i niewiadomą należy kierować się tym, by było jak najmniej działań do wykonania i aby, w miarę możliwości, uniknąć ułamków. W rozwiązywanym układzie równań najlepiej wybrać niewiadomą *y* w drugim równaniu.

$$\begin{cases} 6x+3x=12 \\ 4x-y=2 & \big| -4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+3x=12 \\ -y=2-4x & \big| :(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+3x=12 \\ y=-2+4x \end{cases}$$

Etap 2. Podstawienie i wyliczenie pierwszej niewiadomej. Prawą stronę przekształconego równania wstawiamy do równania, które nie było przekształcane w etapie 1, w miejsce odpowiedniej niewiadomej. W przykładzie lewą stronę wstawiamy do górnego równania w miejsce niewiadomej *y*. Równanie, które otrzymaliśmy, to równanie z jedną niewiadomą (*x*). Wyliczamy wartość tej niewiadomej stosując zasady rozwiązywania równań:

$$\begin{cases} 6x+3x=12 \\ y=-2+4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+3(-2+4x)=12 \\ y=-2+4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-6+12x=12 \\ y=-2+4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x-6=12 & \big| +6 \\ y=-2+4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x=16 & \big| :16 \\ y=-2+4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2+4x \end{cases}$$

Etap 3. Obliczenie drugiej niewiadomej. Ponieważ równanie, przekształcone na etapie 1, przyjęło postać wzoru na jedną z niewiadomych należy go zastosować, by wyliczyć tą niewiadomą. W tym celu wstawiamy obliczoną na etapie 2 wartość do tego wzoru:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4 \cdot 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest para liczb x = 1 i y = 2.

Etap końcowy. Sprawdzenie. Aby sprawdzić poprawność rozwiązania układu równań należy wstawić do obu równań obliczone wartości i rozstrzygnąć, czy liczby te spełniają oba równania. UWAGA! Zawsze wstawiamy liczby do układu równań z samego początku zadania. Nie wystarczy wykonać sprawdzenia jednego z równań! Oba muszą być spełnione! Można wykonać sprawdzenie osobno na każdym z równań (nie łączyć ich klamrą).

$$7(1-1) + 2(2+2) = 1 - 2 + 9$$
$$7 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = -1 + 9$$
$$0 + 8 = 8$$
$$8 = 8$$
$$L = P$$

Pierwsze równanie jest spełnione.

$$4 \cdot 1 - 2 = 2$$
$$4 - 2 = 2$$
$$2 = 2$$
$$L = P$$

Drugie równanie jest spełnione. Układ został rozwiązany poprawnie.

Rozwiązywanie układów równań. Metoda przeciwnych współczynników.

Metoda przeciwnych współczynników jest metodą, którą można rozwiązać jedynie najprostsze układy równań, a szczególnie układ dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi. Składa się z kilku etapów, które zostaną zaprezentowane na przykładzie:

Przykład: *Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników*:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-3}{2} = 2 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$

Etap wstępny. Doprowadzenie każdego z równań układu do najprostszej postaci. Najprostsza postać równania liniowego z dwoma niewiadomymi *x* i *y*, to: *ax* + *by* = *c*, gdzie *a, b* i *c* to dowolne liczby rzeczywiste (*a* i *b* powinny być różne od zera). W powyższym przykładzie pierwsze równanie wymaga przekształcenia (np. likwidacji ułamków), natomiast drugie równanie jest zapisane w najprostszej postaci. W celu przekształcenia równania pierwszego wykonujemy odpowiednie działania i przenosimy wyrazy.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-3}{2} = 2 & \Big| \cdot 6 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2(x+1) + 3(y-3) = 12 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 2 + 3y - 9 = 12 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 12 & \Big| + 7 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$

Etap 2. Przekształcenie równań w celu otrzymania przeciwnych współczynników. Należy za pomocą działania mnożenia stron równania(rzadziej dzielenia)przekształcić jedno z równań lub oba równania w ten sposób, by przy niewiadomych *x* lub niewiadomych *y* w tych równaniach pojawiły się przeciwne współczynniki. *Przypomnienie: liczby przeciwne, to liczby o tej samej wartości bezwzględnej, które różnią się znakami, np.: 2 i –2 lub –10 i 10.*
W przykładzie, najkorzystniej jest pomnożyć równanie drugie przez liczbę –2, wówczas przy niewiadomych *x* w obu równaniach występować będą współczynniki przeciwne: *2* i *–2.*

$$\begin{cases} 2x+3y=19 \\ x-2y=-8 \qquad \Big|\cdot(-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x+3y=19 \\ -2x+4y=16 \end{cases}$$

Etap 3. Sumowanie stronami równań. Podkreślamy symbolicznie układ równań i dodajemy stronami oba równania (można zaznaczyć czynność zapisując symbol „+” obok klamry). Podczas dodawania stron korzystamy z możliwości redukcji wyrazów podobnych. Wyrazy, przy których występują przeciwne współczynniki redukują się do zera. W efekcie otrzymujemy proste równanie, które należy rozwiązać. W ten sposób otrzymujemy wartość pierwszej z niewiadomych.

$$+\underline{\begin{cases} 2x+3y=19 \\ -2x+4y=16 \end{cases}}$$
$$7y=35$$
$$y=5$$

Etap 4. Obliczanie wartości drugiej niewiadomej. Wybieramy jedno z równań układu i wstawiamy w odpowiednie miejsce wartość obliczonej niewiadomej. Do dyspozycji mamy wszystkie równania, które znajdują się ponad podkreśleniem, więc najlepiej wybrać to najprostsze. Po podstawieniu wartości niewiadomej rozwiązujemy równanie tak, by wyliczyć wartość drugiej niewiadomej. Na tym etapie nie należy stosować zapisu z „klamerką”, bo pracujemy tylko z jednym równaniem, a nie całym układem.
W powyższym przykładzie najlepiej wybrać równanie *x – 2y = –8*. Wstawiamy wyliczoną wartość *y = 5* do tego równania.

$$x-2y=-8$$
$$x-2\cdot 5=-8$$
$$x-10=-8 \qquad \Big|+10$$
$$x=2$$

Otrzymaliśmy wartość drugiej niewiadomej. Wynik powinniśmy zapisać w postaci układu (z „klamerką”):

$$\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$$

Etap końcowy. Sprawdzenie. Aby sprawdzić poprawność rozwiązania układu równań należy wstawić do obu równań obliczone wartości i rozstrzygnąć, czy liczby te spełniają oba równania. UWAGA! Zawsze wstawiamy liczby do układu równań z samego początku zadania. Nie wystarczy wykonać sprawdzenia jednego z równań! Oba muszą być spełnione! Można wykonać sprawdzenie osobno na każdym z równań (nie łączyć ich klamrą).

$$\frac{2+1}{3}+\frac{5-3}{2}=2$$
$$\frac{3}{3}+\frac{2}{2}=2$$
$$1+1=2$$
$$2=2$$
$$L=P$$

Pierwsze równanie jest spełnione.

$$2-2\cdot 5=-8$$
$$2-10=-8$$
$$-8=-8$$
$$L=P$$

Drugie równanie jest spełnione. Układ został rozwiązany poprawnie.

<u>Układ oznaczony, nieoznaczony i sprzeczny.</u>

Układ oznaczony. Każdy układ równań liniowych, który posiada dokładnie jedno rozwiązanie nazywamy oznaczonym.

Trzeba pamiętać, że rozwiązaniem układu z dwoma niewiadomymi jest para liczb, więc układ ten jest oznaczony, gdy jego rozwiązaniem jest para liczb (np. *x* i *y*).

Oba układy równań rozwiązane powyżej były układami oznaczonymi:

Układ równań $\begin{cases} 7(x-1)+2(y+2)=x-y+9 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ jest oznaczony, bo jego rozwiązaniem jest para liczb $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Układ równań $\begin{cases} \frac{x+1}{3}+\frac{y-3}{2}=2 \\ x-2y=-8 \end{cases}$ jest oznaczony, bo jego rozwiązaniem jest para liczb $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

Układ sprzeczny. Sprzecznym układem równań nazywamy układ, który nie ma rozwiązania (zbiór rozwiązań jest pusty).

Przykład: Rozwiąż układ równań dowolną metodą:

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ -6x+3y=-7 \end{cases}$$

Układ zostanie rozwiązany metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} 2x-y=1 & \big| \cdot 3 \\ -6x+3y=-7 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 6x-3y=3 \\ -6x+3y=-7 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad 0=-4}$$

UKŁAD SPRZECZNY

W efekcie rozwiązywania otrzymaliśmy równanie sprzeczne, więc układ równań jest sprzeczny (nie ma rozwiązania).

<u>UWAGA!!! W przypadku sprzecznego układu równań musimy zapisać na końcu rozwiązania informację: UKŁAD JEST SPRZECZNY..</u>

Układ nieoznaczony. Nieoznaczonym układem równań nazywamy układ, który ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Nie należy przez to rozumieć, że dowolna para liczb jest jego rozwiązaniem. W większości układów nieoznaczonych, sytuacja jest taka, że jedna z niewiadomych może być dowolną liczbą rzeczywistą, natomiast druga niewiadoma musi zostać wyliczona (w zależności od wybranej wartości pierwszej niewiadomej).

Przykład: Rozwiąż układ równań dowolną metodą:

$$\begin{cases} x-5y=1 \\ -2x+10y=-2 \end{cases}$$

Układ zostanie rozwiązany metodą podstawiania:

$$\begin{cases} x-5y=1 & \big| +5y \\ -2x+10y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+5y \\ -2(1+5y)+10y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2-10y+10y=-2 & \big| +2 \\ x=1+5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=0 & \big| :9 \\ x=1+5y \end{cases}$$

UKŁAD NIEOZNACZONY

Jedno z równań okazało się tożsamościowe, więc układ jest nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań). Jedną z niewiadomych (np. *y*) możemy wybrać spośród wszystkich liczb rzeczywistych, natomiast druga musi być obliczona (sposób obliczenia prezentuje drugie równanie $x = 1 + 5y$). Rozwiązaniami są przykładowo pary liczb x = 6, y = 1 lub x = 26, y = 5 itd…

UWAGA!!! W przypadku nieoznaczonego układu równań musimy zapisać na końcu rozwiązania informację: UKŁAD JEST NIEOZNACZONY.

---

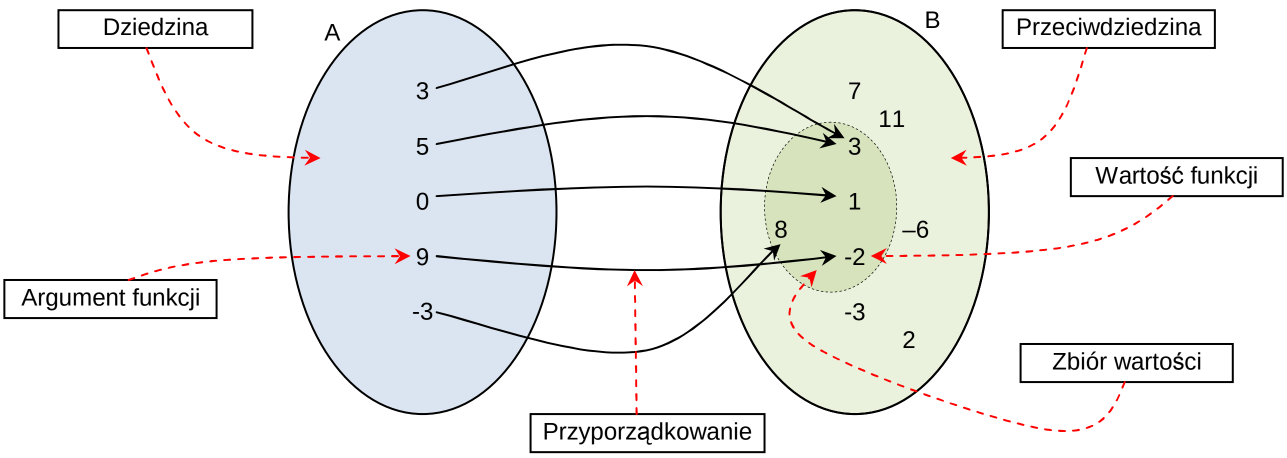
18. Funkcje.

Funkcja. Funkcją ze zbioru A w zbiór B nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru A przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru B.

UWAGA! Powyższe zdanie nie jest definicją lecz określeniem wystarczającym na zajęciach matematyki w gimnazjum.

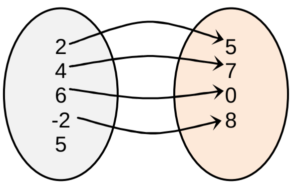
Dziedzina, argumenty, przeciwdziedzina, wartości, zbiór wartości funkcji.

Zbiór A nazywamy **dziedziną** funkcji.
Elementy zbioru A (dziedziny) to **argumenty** funkcji. Argumenty symbolizuje zmienna *x.*
Zbiór B nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji.
Elementy zbioru B (przeciwdziedziny) przyporządkowane pewnym argumentom to **wartości** funkcji. Wartości symbolizuje zmienna *y.*
Zbiór wartości funkcji to podzbiór przeciwdziedziny, do którego należą wszystkie wartości funkcji. Do przeciwdziedziny mogą należeć elementy, które nie są wartościami, ale przeważnie ustala się przeciwdziedzinę funkcji równą zbiorowi wartości.

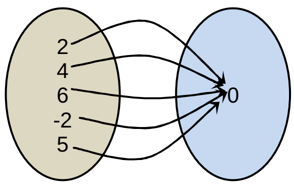


Przykłady funkcji i przyporządkowań, które nie są funkcjami.

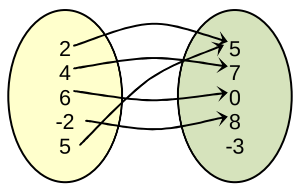
W określeniu funkcji ważnymi stwierdzeniami są: „każdemu elementowi zbioru A” oraz „dokładnie jeden element zbioru B”. Oznacza to, że:



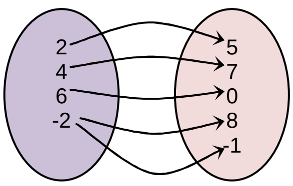
Nie jest funkcją, bo liczbie 5 nie przyporządkowano wartości.



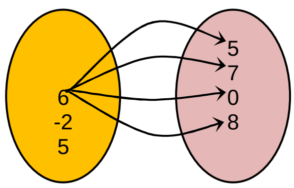
Jest funkcją, bo wszystkie liczby mają przyporządkowaną liczbę 0



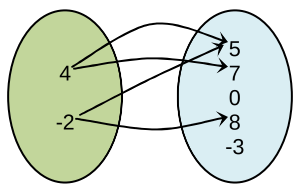
Jest funkcją, bo wszystkie liczby pierwszego zbioru mają przyporządkowaną wartość (każdy po jednej).



Nie jest funkcją, bo liczba -2 ma przyporządkowane dwie wartości.



Nie jest funkcją, bo liczba 6 ma przyporządkowane cztery wartości, a liczby -2 i 5 nie mają przyporządkowanej żadnej wartości.



Nie jest funkcją, bo liczba 4 ma przyporządkowane dwie wartości, podobnie jak liczba -2.

Przykłady funkcji:
- Każdej osobie w klasie można przyporządkować jej wzrost,
- Każdej sztuce towaru na półce w sklepie można przyporządkować jej cenę,
- Każdemu uczniowi w klasie można przyporządkować średnią ocen z matematyki (jeśli wszyscy posiadają choć jedną ocenę),
- Każdej osobie w kinie można przyporządkować miejsce, na którym siedzi,
- Każdemu samochodowi na parkingu można przyporządkować numer rejestracyjny,
- Każdej liczbie ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5} można przyporządkować liczbę dwa razy większą,
- Każdej liczbie ze zbioru {-3, 6, 4, -0,2, 8, 103} można przyporządkować liczbę o 10 mniejszą od niej,
- Każdej liczbie ze zbioru {0, 2, -4, 6, -7} można przyporządkować liczbę do niej przeciwną,
- Każdej liczbie naturalnej można przyporządkować liczbę trzy razy od niej mniejszą,
- Każdej liczbie rzeczywistej można przyporządkować liczbę 4.
- itd…

Pięć ostatnich przykładów to funkcje liczbowe.

Sposoby przedstawiania funkcji liczbowych:

Funkcję można zaprezentować za pomocą kilku sposobów:

Sposób 1. Określenie słowne. Sposób przedstawienia funkcji, w którym zostają określone wszystkie argumenty funkcji oraz, w sposób słowny, zostaje podana informacja o tym, jaka liczba ma być przyporządkowana poszczególnym argumentom. UWAGA! Jeżeli w określeniu słownym nie ma określonej dziedziny, to znaczy że jest ona maksymalnie duża (w większości przypadków jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych). Sposobem słownym można określać również funkcje, które nie są liczbowe.

Przykład: Funkcja przyporządkowuje każdej liczbie ze zbioru {-3, -1, 0, 2, 4} liczbę o 2 mniejszą od niej.

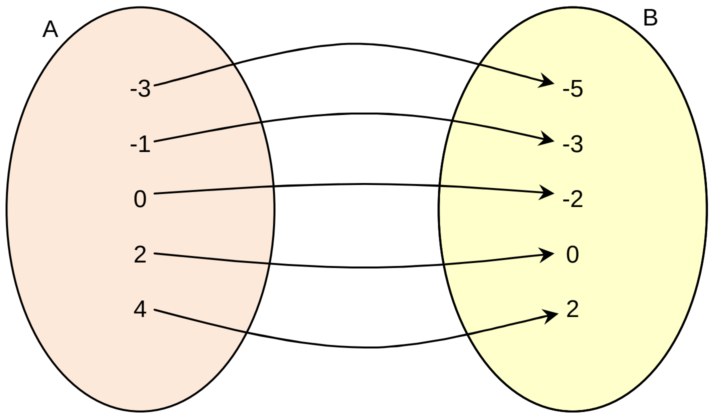
Sposób 2. Tabela (tabelka) funkcji. Sposób przedstawienia funkcji, w którym argumenty zostają zaprezentowane w pierwszym wierszu tabelki, a odpowiadające im wartości funkcji w drugim wierszu tej tabelki. Pierwszy wiersz tabelki oznaczany jest literą *x*, a drugi wiersz literą *y*. Sposób ten nie pozwala na prezentację funkcji nieskończonych lub funkcji o dużej ilości argumentów.

Przykład (kontynuacja poprzedniego przykładu):

x	-3	-1	0	2	4
y	-5	-3	-2	0	2

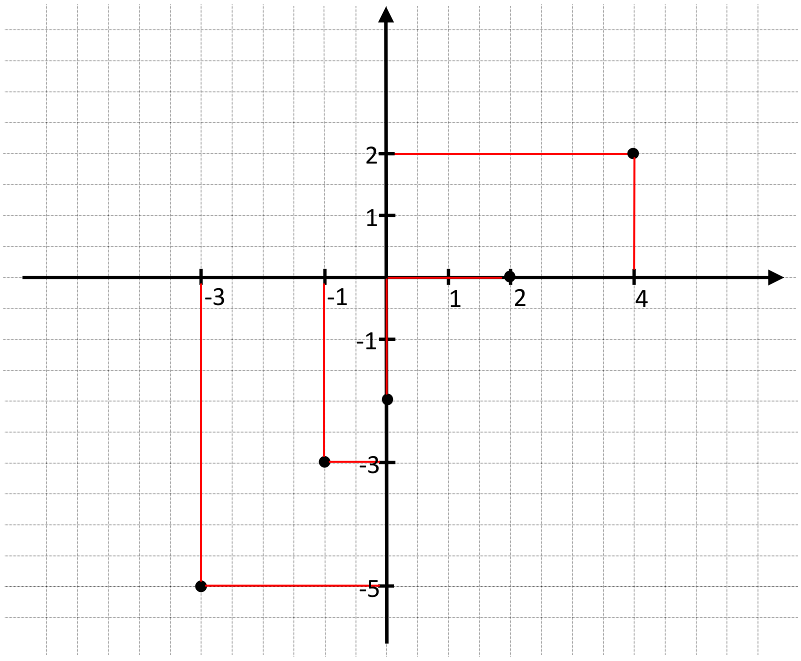
Sposób 3. Graf funkcji. Sposób przedstawienia funkcji, w którym argumenty i wartości zostają zaprezentowane w symbolicznie narysowanych zbiorach (w postaci „jajek”). W pierwszym zbiorze znajdują się argumenty, w drugim wartości. Przyporządkowania prezentowane są jako strzałki pomiędzy argumentem, a odpowiadającą mu wartością. Sposób ten nie pozwala na prezentację funkcji nieskończonych lub funkcji o dużej ilości argumentów.

Przykład (kontynuacja poprzedniego przykładu):



Sposób 4. Wykres funkcji. Sposób przedstawienia funkcji, w którym argumenty to liczby na osi X układu współrzędnych, a wartości to liczby na osi Y układu współrzędnych. Przyporządkowanie jest prezentowane jako punkt zaznaczony w układzie współrzędnych, którego pierwsza współrzędna to argument funkcji, a druga współrzędna to wartość. Funkcje nieskończone mogą tworzyć w układzie współrzędnych wykresy w postaci ciągłej linii prostej lub krzywej.

Przykład (kontynuacja poprzedniego przykładu):



UWAGA! W tej sytuacji wykres to tylko pięć punktów, bo funkcja ma pięć argumentów. Nie wolno połączyć tych punktów jedną linią ciągłą, bo oznaczałoby to, że funkcja ma nieskończenie wiele argumentów i nieskończenie wiele punktów wykresu (niezgodnie z danymi przykładu).

Sposób 5. Wzór funkcji. Sposób przedstawienia funkcji polegający na zapisaniu przyporządkowania za pomocą równania, które prezentuje sposób obliczania wartości (*y*) znając argument (*x*). Jeśli dziedzina funkcji nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, lub największym możliwym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych, to obok wzoru funkcji należy zapisać dziedzinę, wypisując jej argumenty lub określając ją symbolicznie.

Przykład (kontynuacja poprzedniego przykładu):

$$\boxed{y = x - 2}$$

D = {-3, -1, 0, 2, 4}

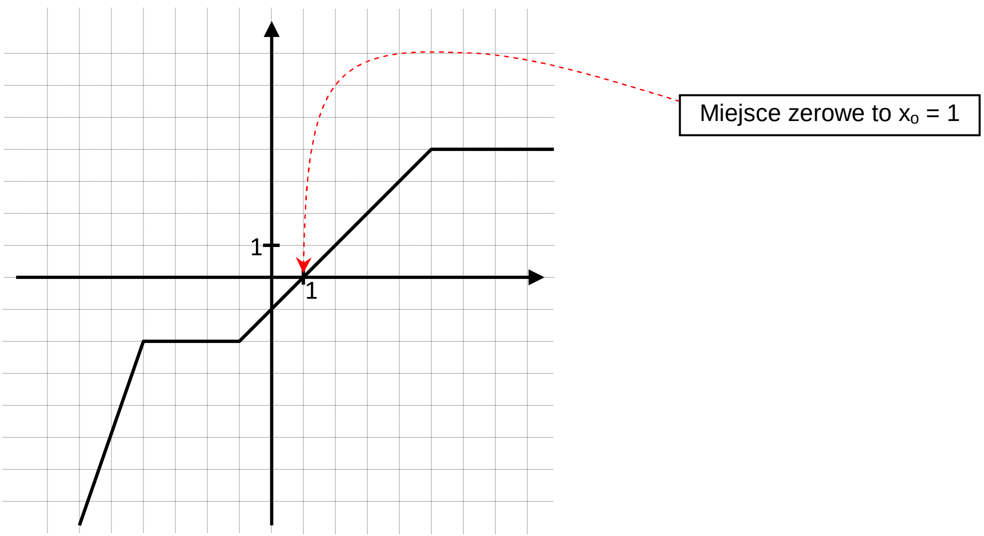
Własności funkcji liczbowych.

Miejsce zerowe funkcji. Miejsce zerowe funkcji to argument, któremu przyporządkowano wartość 0.

Miejsce zerowe funkcji oznaczamy symbolem: $\boxed{x_o}$ lub, gdy miejsc zerowych jest więcej, jako x_1, x_2, x_3, itd…

W przypadku prezentacji funkcji za pomocą wykresu, miejsca zerowego należy szukać w punkcie przecięcia się wykresu z osią X. Miejsce zerowe to pierwsza współrzędna tego punktu (druga współrzędna to 0).

Przykład:



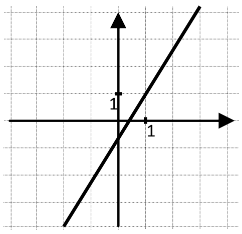
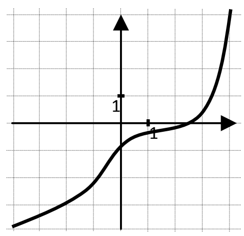
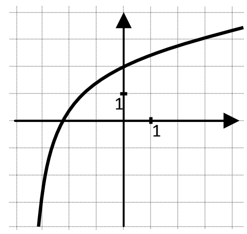
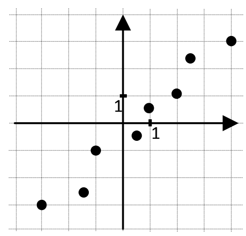
W przypadku prezentacji funkcji za pomocą wzoru, miejsca zerowego należy szukać poprzez wstawienie do wzoru funkcji liczby 0 w miejsce zmiennej *y*. Powstaje wówczas równanie, które należy rozwiązać. Rozwiązaniem tego równania jest miejsce zerowe.

Przykład: Znajdź miejsce zerowe funkcji: $\boxed{y = 3x - 5}$

$$
\begin{aligned}
0 &= 3x - 5 && \big|\, -3x \\
-3x &= -5 && \big|\, :(-1) \\
x &= \frac{5}{3} \\
x_0 &= 1\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

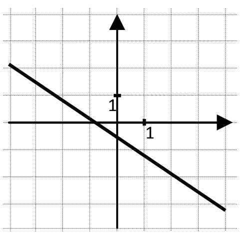
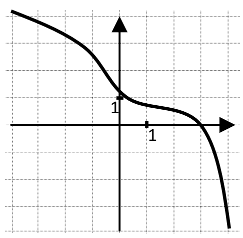
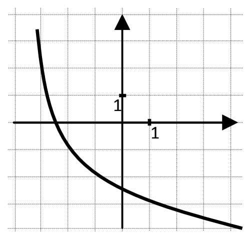
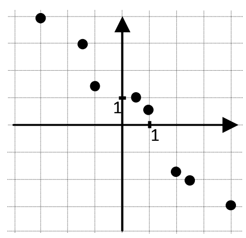
Funkcja rosnąca. Funkcje nazywamy rosnącą, jeżeli ma tą własność, że im większy weźmiemy argument funkcji, tym większa będzie mu przyporządkowana wartość funkcji (dla coraz większych argumentów funkcja przyporządkowuje coraz większe wartości).

Wykres funkcji rosnącej „idzie” w górę (patrząc się od lewej strony do prawej). Na rysunkach zaprezentowane są wykresy funkcji rosnących:

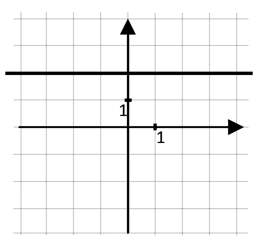
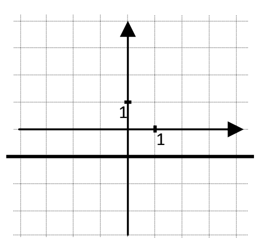
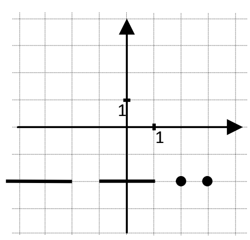
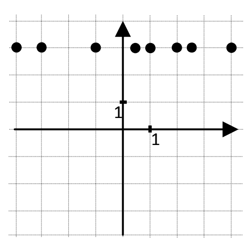
Funkcja malejąca. Funkcje nazywamy malejącą, jeżeli ma tą własność, że im większy weźmiemy argument funkcji, tym mniejsza będzie mu przyporządkowana wartość funkcji (dla coraz większych argumentów funkcja przyporządkowuje coraz mniejsze wartości).

Wykres funkcji malejącej „idzie” w dół (patrząc się od lewej strony do prawej). Na rysunkach zaprezentowane są wykresy funkcji malejących:

Funkcja stała. Funkcje nazywamy stałą, jeżeli ma tą własność, że bez względu na to jaki weźmiemy argument funkcji, wartość będzie zawsze taka sama. Wzór funkcji stałej zawsze ma postać *y = a* (gdzie a jest jakąś liczbą rzeczywistą) lub po przekształceniu może przybrać taką postać. Funkcją stałą jest na przykład: *y = 4* lub *y* = –5 , a nawet *y = 0.*

Wykres funkcji stałej jest prostą linią poziomą lub zbiorem punktów i odcinków ułożonych na linii poziomej. Na rysunkach zaprezentowane są wykresy funkcji stałych:

19. Różne rodzaje funkcji liczbowych.

Funkcja liniowa. Funkcją liniową nazywamy funkcję o dziedzinie w zbiorze liczb rzeczywistych, której wykresem jest linia prosta.

Wzór funkcji liniowej ma zawsze postać $\boxed{y = ax + b}$

Gdzie *a* i *b* to pewne liczby rzeczywiste.

Funkcjami liniowymi są więc:

$y = 2x + 3$	bo $a = 2,\quad b = 3,$
$y = -4x + 9$	bo $a = -4, b = 9,$
$y = x - 1$	bo $a = 1,\quad b = -1,$
$y = 5x$	bo $a = 5,\quad b = 0,$
$y = 2$	bo $a = 0,\quad b = 2,$
$y = 0$	bo $a = 0,\quad b = 0.$

Funkcją liniową będzie też każda funkcja, której wzór można przekształcić do postaci $y = ax + b$. Np.:

$y = \frac{x+2}{2}$, bo można go przekształcić do postaci: $y = \frac{1}{2}x + 1$

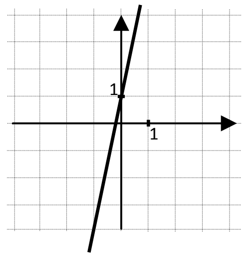
$y = 3(x-1) + (x+1)$, bo można go przekształcić do postaci: $y = 4x - 2$

a – <u>współczynnik kierunkowy</u>. Jest „odpowiedzialny" za to, czy wykres funkcji jest „stromy", czy nie. Im większa jest wartość (bezwzględna) współczynnika kierunkowego (w porównaniu z liczbą 1), tym większy jest kąt nachylenia wykresu do osi X.
Jeśli współczynnik *a* jest liczbą dodatnią, to funkcja liniowa jest rosnąca.
Jeśli współczynnik *a* jest liczbą ujemną, to funkcja liniowa jest malejąca.
Jeśli współczynnik *a* jest równy 0, to funkcja liniowa jest stała.

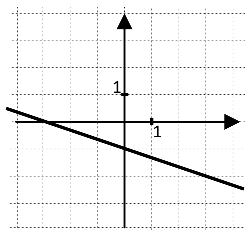
b – <u>wyraz wolny</u>. Jest „odpowiedzialny" za punkt przecięcia się wykresu z osią Y. Punkt ten ma współrzędne (0, *b*).

Przykłady:

Wykres funkcji $y = 5x + 1$ jest „stromy", bo współczynnik kierunkowy jest duży (*a = 5* jest dużo większe od 1). Funkcja jest rosnąca, bo współczynnik kierunkowy jest dodatni (*5 > 0).* Wykres przecina oś Y w punkcie (0, 1), bo wyraz wolny *b = 1.*



Wykres funkcji $y = -\frac{1}{3}x - 1$ jest „płaski", bo współczynnik kierunkowy jest mały (wartość bezwzględna $a = -\frac{1}{3}$ wynosi $\frac{1}{3}$ i jest dużo mniejsza od 1). Funkcja jest malejąca, bo współczynnik kierunkowy jest ujemny ($-\frac{1}{3} < 0$). Wykres przecina oś Y w punkcie (0, –1), bo wyraz wolny *b = –1.*

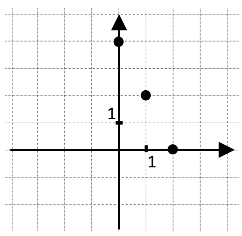


<u>Wykres funkcji liniowej</u>: Aby narysować wykres funkcji liniowej należy skorzystać z częściowej tabelki funkcji. Ponieważ funkcja ma nieskończoną dziedzinę (zbiór liczb rzeczywistych) nie jest możliwe stworzenie kompletnej tabeli funkcji. Można jednak wybrać kilka argumentów i przedstawić przyporządkowanie za pomocą tabelki tylko dla tych przykładowych liczb. Taką tabelkę nazywamy częściową (lub cząstkową). W przypadku funkcji liniowej wystarczy zaprezentować przyporządkowania dla dwóch argumentów, bo do narysowania prostej wystarczą dwa punkty. Zwykło się jednak tworzyć tabelkę częściową funkcji liniowej, w której umieszcza się co najmniej trzy argumenty, wybierane przypadkowo, w zależności od rodzaju wzoru i wielkości rysunku. Warto, by jednym z wybranych argumentów była liczba 0.

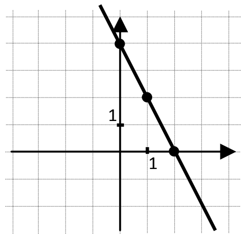
Przykład: Narysuj wykres funkcji liniowej $y = -2x + 4$.

Tworzymy częściową tabelkę funkcji:

x	0	1	2
y	4	2	0



Przyporządkowania z tabelki prezentujemy w układzie współrzędnych jako punkty (rysunek obok):



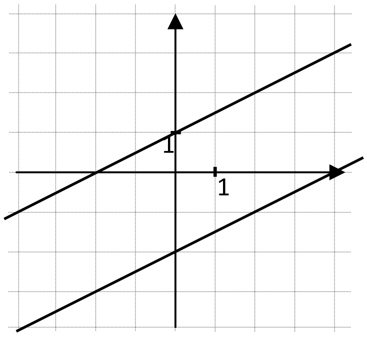
Rysujemy linię prostą przechodzącą przez wyznaczone punkty.

Otrzymaliśmy w ten sposób wykres funkcji $y = -2x + 4$

<u>Warunek równoległości wykresów funkcji liniowych.</u>

Dwie proste, które są wykresami funkcji liniowych będą równoległe tylko wtedy, gdy wzory tych funkcji mają identyczny współczynnik kierunkowy.

Przykład: Wykresy funkcji $y = \frac{1}{2}x - 2$ oraz $y = \frac{1}{2}x + 1$ są równoległe, bo we wzorach obu funkcji współczynnik kierunkowy jest taki sam. Jest nim liczba $\frac{1}{2}$. Można sprawdzić ten fakt rysując oba wykresy w jednym układzie współrzędnych.



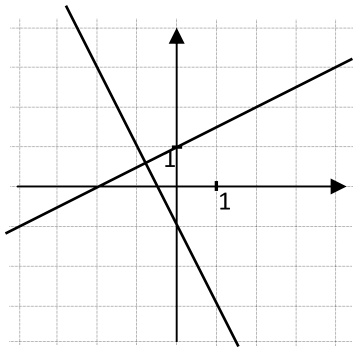
<u>Warunek prostopadłości wykresów funkcji liniowych.</u>

Dwie proste, które są wykresami funkcji liniowych będą prostopadłe tylko wtedy, gdy we wzorach tych funkcji znajdować się będą współczynniki kierunkowe, których iloczyn wynosi –1. Oznacza to, że współczynniki te różnić się będą znakiem, a wartość jednego z nich jest odwrotnością wartości drugiego.

Przykład: Wykresy funkcji $y = -2x - 1$ oraz $y = \frac{1}{2}x + 1$ są prostopadłe, bo we wzorach obu funkcji występują współczynniki kierunkowe, których iloczyn wynosi –1.

$$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

Można sprawdzić ten fakt rysując oba wykresy w jednym układzie współrzędnych.



Funkcja kwadratowa. Parabola.

Funkcja kwadratowa to funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a wzór można przedstawić w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie *a, b* i *c* są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym współczynnik *a* nie może być równy 0.

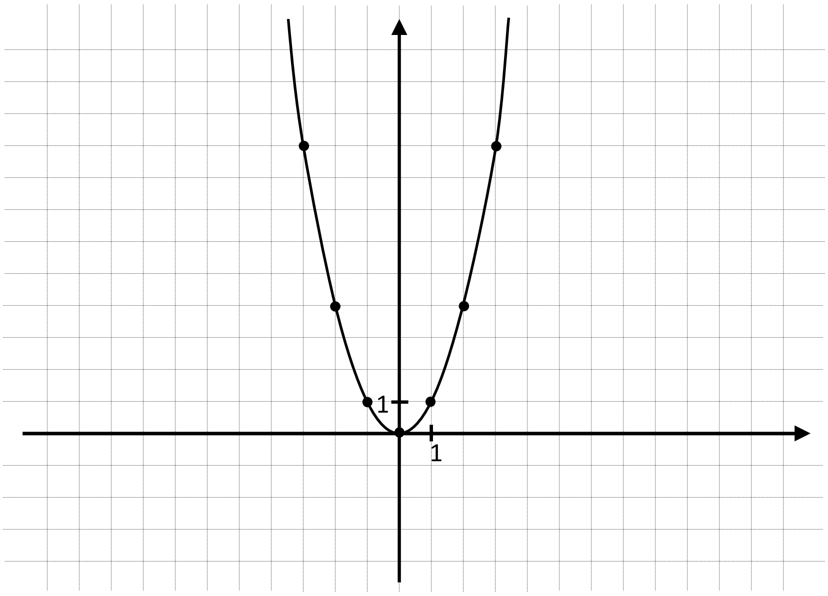
Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

Najprostszą funkcją kwadratową jest wykres funkcji:

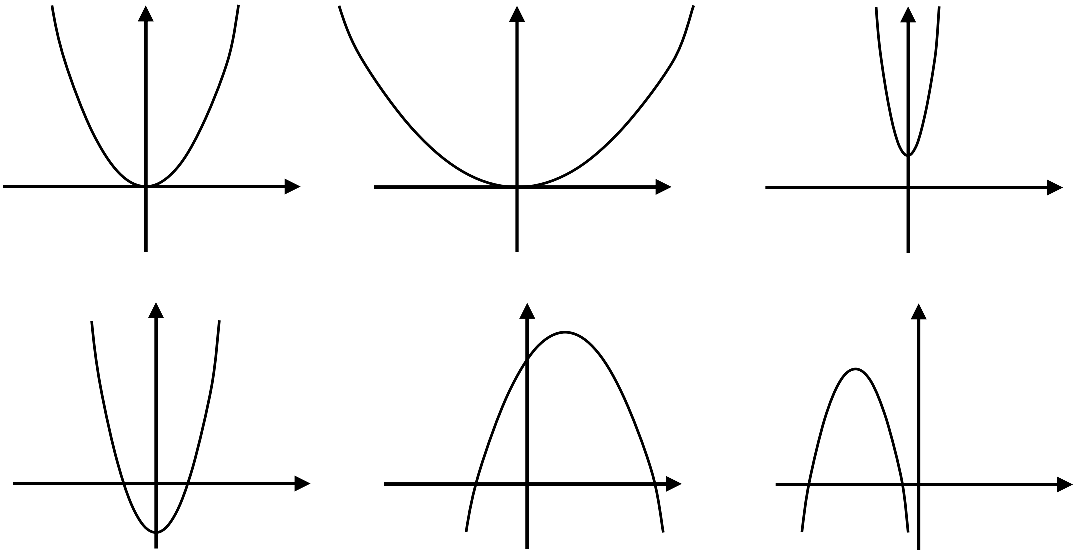
$$\boxed{y = x^2}$$

Kształt wykresu pomoże narysować tabelka cząstkowa:

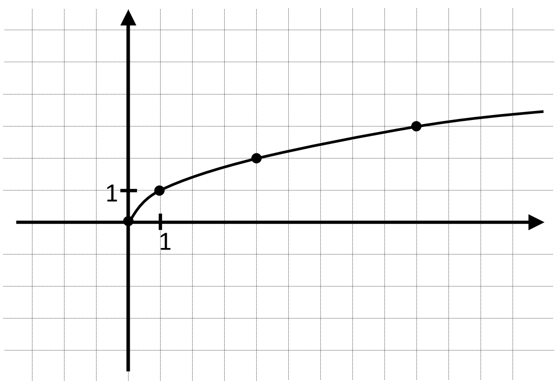
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



Funkcja kwadratowa może mieć wykres paraboliczny o różnych kształtach i położeniach. Zależy to od współczynników występujących we wzorze funkcji. Wykres każdej funkcji kwadratowej można narysować korzystając z tabelki cząstkowej (jak w opisanym wyżej przykładzie). Przykłady wykresów funkcji kwadratowej:



Parabola, a właściwie tylko jedna część zwana „wąsem", jest również wykresem funkcji $y = \sqrt{x}$, której dziedziną jest zbiór liczb dodatnich wraz z zerem (nie istnieje pierwiastek liczby ujemnej).



Proporcjonalność prosta. Wielkości wprost proporcjonalne.

Proporcjonalność prosta jest specjalnym rodzajem funkcji liniowej. Jest to funkcja liniowa, której wzór ma postać:

$$\boxed{y = ax}$$

Współczynnik *a* jest liczbą rzeczywistą i nazywany jest **współczynnikiem proporcjonalności**.

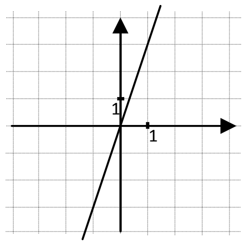
Wykresem proporcjonalności prostej jest linia prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych, czyli punkt o współrzędnych (0, 0).

Przykład. Narysuj wykres proporcjonalności prostej $y = 3x$.

Rysując wykres można skorzystać z tabelki cząstkowej, choć po nabraniu pewnej wprawy łatwo narysować wykres prowadząc obliczenia w głowie. Pamiętając, że wykres proporcjonalności prostej musi przechodzić przez początek układu współrzędnych, wystarczy dopasować jeszcze jeden punkt, korzystając z bardzo prostego wzoru funkcji.

x	0	1
y	0	3

Rysujemy wykres korzystając z dwóch punktów wyznaczonych w tabeli (lub w głowie).



Wielkości wprost proporcjonalne. Z pojęciem proporcjonalności prostej mamy często do czynienia porównując wielkości fizyczne lub inne wielkości spotykane w życiu codziennym. Jeśli pomiędzy dwoma wielkościami można znaleźć związek, który opisuje wzór proporcjonalności, to nazywamy je **wprost proporcjonalnymi**.

Dwie wielości są wprost proporcjonalne, jeśli ich stosunek jest stały. Oznacza to, że gdy jedną wielkość zwiększymy (przypuśćmy dwukrotnie), to w identyczny sposób zwiększy się też druga wielkość (również dwukrotnie). Stosunek wielkości wprost proporcjonalnych to **współczynnik proporcjonalności**.

Przykłady wielkości wprost proporcjonalnych:

- Waga zakupionej kiełbasy i jej cena – im więcej zakupimy kiełbasy, tym więcej trzeba za nią zapłacić,
- Czas jazdy samochodem (ze stałą prędkością) i długość trasy jaką uda się pokonać – im dłużej jedziemy, tym dłuższą trasę pokonamy,
- Długość metalowego pręta o średnicy 0,5 cm i jego waga – jeśli wziąć dwa takie pręty, jeden dłuższy drugi krótszy to ich waga będzie proporcjonalna do długości (dłuższy będzie ważyć więcej),
- Ilość wody w probówce i wysokość do jakiej sięga – jeśli nalejemy 5 mililitrów wody to osiągnie ona na niewielką wysokość, ale jeśli nalać do tej probówki 10 mililitrów, to słupek wody będzie dwa razy wyższy,
- Na zajęciach matematyki korzysta się z proporcjonalności danych ilościowych i danych procentowych. Na przykład: ilość chłopców i dziewcząt w klasie jest wprost proporcjonalna do procentowego udziału chłopców i dziewcząt w klasie. Inny przykład: Ilość (masa) węglowodanów, białek i tłuszczy w kawałku białego sera jest wprost proporcjonalna do procentowych zawartości tych substancji w kawałku sera.

Zadania tekstowe dotyczące wielkości wprost proporcjonalnych można rozwiązać za pomocą proporcji.

Przykład:

„Na pokrycie ścieżki o powierzchni 20 m^2, potrzeba 600 litrów asfaltu. Oblicz, ile asfaltu potrzeba do pokrycia placu o powierzchni 150 m^2, jeśli grubość asfaltu będzie taka sama jak na ścieżce?”

Ilość asfaltu i powierzchnia, którą można pokryć tym asfaltem to wielkości proporcjonalne (ważna jest tu informacja, że grubość asfaltu będzie taka sama, bo jeśli tak by nie było to wielkości nie mogłyby zostać uznane za proporcjonalne). Łatwo stwierdzić, że im większa powierzchnia, tym więcej asfaltu będzie trzeba użyć. Zależność ta jest proporcjonalnością prostą, gdyż zwiększając powierzchnię dwukrotnie, ilość asfaltu również musiałaby zwiększyć się dwukrotnie, zwiększając powierzchnię trzy razy, również ilość asfaltu musiałaby zwiększyć się trzykrotnie itd…

Skoro wielkości są proporcjonalne, to można ułożyć tabelę informacji:

	Powierzchnia (w m^2)	Ilość asfaltu (w litrach)
Sytuacja 1	20 m^2	600 l
Sytuacja 2	150 m^2	x

lub w skrócie:
20 m^2 ———————— 600 l
150 m^2 ———————— x

Proporcję rozwiązujemy stosując odpowiednio zmodyfikowane twierdzenie o wyrazach proporcji:

$$x = \frac{150 \cdot 600}{20} = 4500\ l$$

Odpowiedź: Aby pokryć powierzchnię placu należy użyć 4500 litów asfaltu.

Proporcjonalność odwrotna. Wielkości odwrotnie proporcjonalne.

Proporcjonalność odwrotna jest to funkcja określona wzorem:

$$\boxed{y = \frac{a}{x}}$$

Liczba *a* jest liczbą rzeczywistą. Dziedziną proporcjonalności odwrotnej jest zbiór liczb rzeczywistych za wyjątkiem liczby 0.

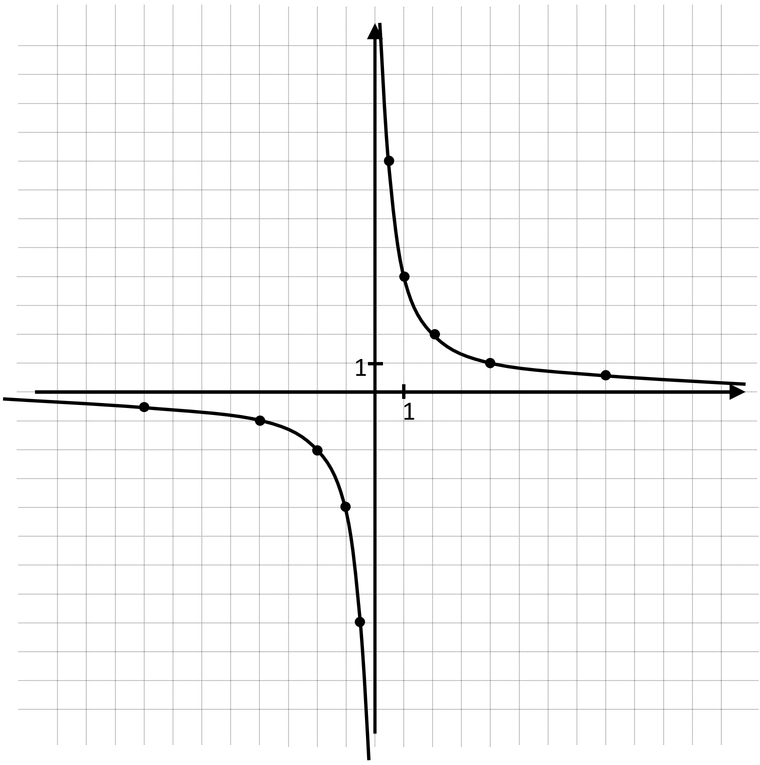
Wykresem proporcjonalności odwrotnej jest krzywa zwana **hiperbolą**.

Przykład. Narysuj wykres proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{4}{x}$.

Rysując wykres można skorzystać z tabelki cząstkowej. Konieczne jest sprawdzenie, jakie wartości przyjmuje ta funkcja dla argumentów dodatnich jak i ujemnych. Trzeba pamiętać, że zero nie jest argumentem tej funkcji i nie można użyć liczby 0 w tabelce. Najlepiej wybierać do tabeli dzielniki liczby 4.

x	8	4	2	1	0,5	– 0,5	– 1	– 2	– 4	– 8
y	0,5	1	2	4	8	– 8	– 4	– 2	– 1	– 0,5

Rysujemy wykres, korzystając z punktów wyznaczonych w tabeli.



<u>Wielkości odwrotnie proporcjonalne</u>. Z pojęciem proporcjonalności odwrotnej mamy często do czynienia porównując wielkości fizyczne lub inne wielkości spotykane w życiu codziennym. Jeśli pomiędzy dwoma wielkościami można znaleźć związek, który opisuje wzór proporcjonalności odwrotnej, to nazywamy je **odwrotnie proporcjonalnymi**.

Dwie wielości są odwrotnie proporcjonalne, jeśli ich iloczyn jest stały. Oznacza to, że gdy jedną wielkość zwiększymy (przypuśćmy dwukrotnie), to druga wielkość zmniejszy się w identyczny sposób (również dwukrotnie).

Przykłady wielkości odwrotnie proporcjonalnych:

- Długość i szerokość prostokąta w zbiorze prostokątów o obwodzie równym 20 cm – im dłuższy będzie jeden bok, tym krótszy musi być drugi, żeby obwód wyniósł 20 cm.
- Jeśli za wykonaną pracę brygada pracowników ma otrzymać określoną kwotę do podziału, to odwrotnie proporcjonalnymi wielkościami będzie ilość pracowników i kwota jaką otrzyma każdy z nich – im więcej pracowników, tym mniejszą kwotę dostanie każdy z nich za wykonaną pracę.
- Czas jazdy samochodem i prędkość samochodu – im szybciej będziemy jechać, tym mniej czasu potrzeba na przejechanie trasy,
- Przyspieszenie ciała i masa tego ciała – im cięższe ciało, tym mniejsze przyspieszenie można mu nadać działając podobną siłą,
- Jeśli w cukierni wyprodukowano pewną partię ciasteczek, które należy spakować do pudełek, to wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi będą, wielkość pudełek i ich ilość – im większe są pudełka, tym mniej ich potrzeba na spakowanie wyprodukowanej partii ciastek.

Zadania tekstowe dotyczące wielkości wprost proporcjonalnych można rozwiązać korzystając z prostego rozumowania, lub za pomocą własności proporcjonalności odwrotnej mówiącej, że iloczyn wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały.

Przykład:

„W wytwórni wyprodukowano dużą ilość napoju. Napój ten rozlano do trzech tysięcy butelek o pojemności 0,5 litra. Ile butelek o pojemności 0,75 litra należałoby użyć, aby postanowiono cała partię napoju sprzedawać w takich, większych butelkach?”

Ilość butelek i objętość jednej butelki, to wielkości odwrotnie proporcjonalne w tym zadaniu. Łatwo stwierdzić, że im większa objętość butelki, tym mniej butelek potrzeba, by zmieścić całą partię napoju. Zależność ta jest proporcjonalnością odwrotną, gdyż biorąc butelki o dwukrotnie większej objętości, ilość potrzebnych butelek zmalałaby dwa razy.

Sposób 1: Za pomocą prostego rozumowania. Sposób ten nie wymaga wykorzystywania własności proporcjonalności odwrotnej:

Skoro 3000 butelek o pojemności 0,5 litra pomieściło cała partię wyprodukowanego napoju, to oznacza, że tego napoju wyprodukowano 1500 litrów, bo $0{,}5 \cdot 3000 = 1500$.
Jeśli chcemy użyć butelek o pojemności 0,75 litra to musi być ich: $1500 : 0{,}75 = 150000 : 75 = 2000$.

Odpowiedź. Należy użyć 2000 butelek o pojemności 0,75 litra.

Sposób 2: Za pomocą własności proporcjonalności odwrotnej, mówiącej, że iloczyn wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały:

Skoro wielkości są proporcjonalne, to można ułożyć tabelę informacji:

	Ilość butelek	pojemność butelki (w litrach)
Sytuacja 1	3000	0,5 l
Sytuacja 2	x	0,75 l

lub w skrócie:

3000 ———— 0,5 l
x ———— 0,75 l

Proporcję rozwiązujemy stosując własność proporcji odwrotnej, mówiącej, że iloczyn wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały:

$$0{,}75 \cdot x = 3000 \cdot 0{,}5$$
$$0{,}75x = 1500 \quad \big| : 0{,}75$$
$$x = 1500 : 0{,}75$$
$$x = 2000$$

Odpowiedź. Należy użyć 2000 butelek o pojemności 0,75 litra.

Opracował: Paweł Góralczyk

Gimnazjum Społeczne im. Lady Sue Ryder w Woli Batorskiej